Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Maren-Wanda Wolf

11. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

SoSe 2016

Abgabe: 14.7.2016

1. Aufgabe (3 Zusatz-TP)
Es seien p, q zwei Polynome von der Gestalt

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \text{ und } q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m \, .$$

Es gelte überall $p(x) = q(x)$, wobei $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$ seien. Zeigen Sie, dass dann $n = m$ ist und dass für sämtliche Koeffizienten $a_k = b_k$ gilt.

2. Aufgabe (5 Zusatz-PP)

a) Schreiben Sie ein `matlab`-Programm zur Extrapolation der Werte des Differenzenquotienten
$$D(h) = \frac{f(\tilde{x}+h) - f(\tilde{x})}{h}, \quad 0 < h \leq H,$$
an der Stelle $h = 0$. Werten Sie dazu das durch die Stützstellen $h_0 > h_1 > \ldots > h_N > 0$ gegebene Interpolationspolynom p_n in $h = 0$ mit dem Algorithmus von Aitken-Neville aus.

b) Stellen Sie für $\tilde{x} = 0$, $H = \pi/2$ und die Funktionen
$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 + \sin(x), \\ f_2(x) &= \sqrt{x^3}, \\ f_3(x) &= \frac{1}{\gamma} \arctan(\gamma x), \quad \gamma = 10^4, \end{aligned}$$
jeweils den Fehler ohne Extrapolation, also $|f_i'(\tilde{x}) - D(h_n)|$, und mit Extrapolation, also $|f_i'(\tilde{x}) - p_n(0)|$, in Abhängigkeit von $n = 1, \ldots, 40$ graphisch dar (Hinweis: `semilogy`). Für alle drei Fälle sollten Sie als Stützstellen einmal $h_k = 2^{-k} H$, $k = 0, \ldots, n$ und das andere Mal $h_k = H/(k+1)$, $k = 0, \ldots, n$ verwenden. Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse.

3. Aufgabe (4 Zusatz-TP)
Die n-te Newton-Cotes-Quadraturformel ist so konstruiert, dass sie für Polynome $p \in P_n$ exakt ist. Zeigen Sie, dass für gerades n sogar Polynome vom Grade $n+1$ exakt integriert werden.

4. Aufgabe (4 Zusatz-TP)

a) Berechnen Sie die Lösung $x : [0, \infty) \to \mathrm{R}$ des Anfangswertproblems

$$x'(t) = x(t) - t - \sin(t) \qquad \forall t > 0, \qquad x(0) = 1.$$

b) Berechnen Sie die Fehlerfunktion $x - \tilde{x}_1$ für das gestörte Anfangswertproblem

$$\tilde{x}_1'(t) = \tilde{x}_1(t) - t - \sin(t) \qquad \forall t > 0, \qquad \tilde{x}_1(0) = 1.2,$$

und vergleichen Sie diese mit der Konditionsabschätzung.

c) Berechnen Sie die Fehlerfunktion $x - \tilde{x}_2$ für das gestörte Anfangswertproblem

$$\tilde{x}_2'(t) = \tilde{x}_2(t) - t - \sin(t) - \frac{1}{2}\cos(t) \qquad \forall t > 0, \qquad \tilde{x}_2(0) = 1,$$

und vergleichen Sie diese mit der Konditionsabschätzung.

d) Plotten Sie x, $\tilde{x}_1$ und $\tilde{x}_2$ für $t \in [0, 2]$ in einem Plot. Was beobachten Sie?

5. Aufgabe (3 Zusatz-TP + 2 Zusatz-PP)

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\phi(x) \quad = \quad \frac{1}{2 + x} \tag{1}$$

auf dem Intervall $[0, 1]$ einen eindeutigen Fixpunkt $x^\star$ besitzt und dass die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \phi(x_k) \tag{2}$$

für jeden Startwert $x_0 \in [0, 1]$ gegen $x^\star$ konvergiert.

b) Wieviele Iterationen braucht man höchstens, um $x^\star$ bis auf eine Genauigkeit von 10^{-4} zu berechnen, wenn man mit $x_0 = 0$ startet?

c) Schreiben Sie ein kurzes Matlabskript und berechnen Sie den Fixpunkt mit mindestens Genauigkeit 10^{-4}.