Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Maren-Wanda Wolf

3. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

SoSe 2016

Abgabe: 19.5.2016

1. Aufgabe (3 PP)
Überlegen Sie sich sich eine Möglichkeit, für gegebe Stützstellen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, die Lebesque-Konstante $\Lambda_n = \max_{x\in[a,b]} \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$ numerisch zu approximieren und schreiben Sie ein entsprechendes Programm `lebesqueKonstante(x)`. Dabei enthält der Vektor `x` gerade die Stützstellen x_k. Benutzen Sie ihr Programm, um auf dem Intervall $[-1, 1]$ die Lebesque Konstante Λ_n sowohl für $n = 5, 10, 20, 40, 80$ äquidistant verteilte Stützstellen, als auch für die sogenannten Tschebyscheff-Stützstellen

$$x_k = \cos\left(\frac{2(n-k)+1}{2(n+1)}\pi\right), \quad k = 0, \ldots, n,$$

zu approximieren. Kommentieren und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

2. Aufgabe (6 PP)
Schreiben Sie ein Programm `interpolation(x,fx,z)`, das das Interpolationspolynom einer Funktion $f : [a, b] \to \mathrm{R}$ an mehreren Stellen z_j auswertet. Dabei enthalten die Einträge von `x` die Stellen x_k und die von `fx` die Werte $f(x_k)$, an denen das Polynom mit f übereinstimmen soll. Die Einträge des Vektors `z` sind die Stellen z_j, an denen das Polynom ausgewertet werden soll. Ihre `matlab`-Funktion soll die Werte des Polynoms an diesen Stellen zurückgeben. Testen Sie Ihr Programm mit den Funktionen

$$\begin{aligned}
f_1 &: [0, 2\pi] \to \mathrm{R}, && x \mapsto \sin(x)\\
f_2 &: [0, 1] \to \mathrm{R}, && x \mapsto x^{\frac{3}{2}}\\
f_3 &: [-1, 1] \to \mathrm{R}, && x \mapsto \frac{1}{\gamma}\arctan(\gamma x), \gamma = 10.
\end{aligned}$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Werten Sie für jedes f_i jeweils den Interpolationsfehler für $n = 5, 10, 15, 20, ..., 70, 75$ äquidistant verteilte Stützstellen näherungsweise durch

$$\|f_i - p_n\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f_i(x) - p_n(x)| \approx \max_{x\in M} |f_i(x) - p_n(x)|$$

mit $M = \{x \in [a, b] : x = a + \frac{m}{10^4}(b - a), m \in \mathrm{N}\}$ aus. Plotten Sie die Näherung des Interpolationsfehlers für jedes f_i in Abhängigkeit vom Polynomgrad in einer geeigneten Skalierung (`plot, semilogx, semilogy, loglog`?).

b) Gehen Sie nun für die gestörte Funktion $\tilde{f}_1$, mit $\tilde{f}_1(0) = \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ und $\tilde{f}_1(x_k) = f_1(x_k)$ für $x_k \neq 0$, analog zu Teil a) vor. Verwenden Sie dabei sowohl die äquidistanten Stützstellen, als auch die Tschebyscheff-Stützstellen. (Achtung: die Tschebyscheff-Stützstellen auf $[0, 2\pi]$ erhält man durch lineare Transformation der Tschebyscheff-Stützstellen auf $[-1, 1]$ aus Aufgabe 1.) Plotten Sie für $n = 5, 10, 15$ die Interpolationspolynome im Vergleich zur Funktion f_1 indem Sie die Polynome und f_1 auf M auswerten. Im Plot sollen außerdem die gegebenen Stützstellen sichtbar sein. Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse. Berücksichtigen Sie dabei insbesondere ihrer Ergebnisse aus Aufgabe 1.

3. Aufgabe (2 TP)
$f : [a, b] \to \mathrm{R}$ sei unendlich oft differenzierbar, und alle Ableitungen $f^{(n)}$ seien gleichmäßig in n beschränkt. Beweisen Sie, dass für $b - a \leq 1$ der Interpolationsfehler für jede Wahl von Stützstellen $a = x_0 < ... < x_n = b$ gegen Null konvergiert, wenn die Anzahl der Stützstellen gegen Unendlich geht. (Die Konvergenzaussage gilt übrigens auch für $b - a > 1$, erfordert dann aber ein zusätzliches Argument.)