

4. Übung zur Vorlesung  
COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK II  
SoSe 2016

**Abgabe: 26.5.2016**

**1. Aufgabe** (4 PP)

Wir wollen versuchen, das Integral

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

numerisch zu approximieren. Dazu unterteilen wir das Intervall  $[0, 1]$  äquidistant in  $n$  Teilintervalle mit den Grenzen  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$  und berechnen die sogenannte *Riemann-Summe*

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

mit  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ . Schreiben Sie ein `matlab`-Programm `riemann(I,f,n,q)`, das diese Riemann-Summe berechnet. Dabei bezeichnet der Vektor `I` das Integrationsintervall, `f` die Funktion, `n` die Anzahl der Teilintervalle und  $0 \leq q \leq 1$  einen Wert, der durch  $\xi_k = x_{k-1} + q(x_k - x_{k-1})$  die Lage des Wertes  $\xi_k$  festlegt.

Berechnen Sie nun für  $n = 1, \dots, 500$  den Fehler der Riemann-Summe, und plotten Sie diesen Fehler in einer logarithmischen Skala gegen  $n$ . Werten Sie dazu einmal die Funktion an den Anfangspunkten der Teilintervalle aus (d.h.  $q = 0$ ), ein anderes Mal an deren Mittelpunkten (d.h.  $q = 0.5$ ). Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse. Was beobachten Sie?

*Hinweis:* Für die Berechnung des Fehlers können Sie `0.5 * erf(1) * sqrt(pi)` als Vergleichswert heranziehen.

## 2. Aufgabe (3 TP)

- a) Bestimmen Sie die relative Kondition des Integrationsoperators

$$I : C[a, b] \ni f \mapsto \int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R}$$

bezüglich der Maximumsnorm auf  $C[a, b]$ . Kann die relative Kondition beliebig schlecht werden?

- b) Wie verhalten sich die absolute und relative Kondition der Integration von  $\sin((2n+1)x)$  auf dem Intervall  $[0, \pi]$  für  $n \rightarrow \infty$ ?

## 3. Aufgabe (4 TP)

- a) Zeigen Sie, dass die Newton-Côtes-Formeln für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  symmetrisch sind.

- b) Zeigen Sie, dass die Gewichte  $\lambda_k$  der Newton-Côtes-Formeln die Gleichung

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k = 1, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

erfüllen.