Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Maren-Wanda Wolf

5. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

SoSe 2016

Abgabe: 2.6.2016

1. Aufgabe (5 PP)
Implementieren Sie die summierten Newton-Côtes-Formeln $S_n^{(k)}$ als Matlab-Funktion `[S,A]=sumnc(ab,f,k,n)`. Dabei ist `ab` das Integrationsintervall, `f` die zu integrierende Funktion und `n` die Anzahl der Teilintervalle, auf denen die `k`-te Newton-Côtes-Formel ($1 \leq$ `k` ≤ 6) angewandt wird. Das Programm soll den Wert `S` der Quadraturformel und die Anzahl `A` der durchgeführten `f`-Auswertungen zurückgeben. Vergleichen Sie die Quadraturformeln für `k` $= 1, 2, 6$ wie folgt:

a) Werten Sie das Integral $I = \int_0^\pi \sin(t)dt$ jeweils für $n \in 6 \cdot \{1, 2, 3, 4, ..., 50\}$ aus. Erstellen Sie folgende Plots
   - Fehler $|I - S_n^{(k)}|$ über Anzahl Teilintervalle n, doppelt logarithmisch
   - Aufwand (f-Auswertungen) über Fehler $|I - S_n^{(k)}|$, doppelt logarithmisch

b) Verfahren Sie für $I = \int_0^1 \left(\sqrt{t} + \sin(21\pi t)\right) dt$ und $n \in 6 \cdot \{1, 2, 3, 4, ..., 200\}$ wie in Teil a).

Kommentieren Sie die Ergebnisse insbesondere vor dem Hintergrund der unterschiedlichen Ordnung der Verfahren und der Glattheit der Funktionen.

2. Aufgabe (3 TP + 3 PP)
Es seien I_i , $i = 1, 2$, zwei Quadraturformeln. Für ein gegebenes $f \in C[a, b]$ sei $I(f) = \int_a^b f(t)dt$, und $I_i(f)$, $i = 1, 2$ sei der durch Quadratur mit I_i bestimmte Näherungswert für $I(f)$. Wir nehmen an, dass I_1 höchstens die Ordnung $p_1 > 0$ hat, dass also die Abschätzung

$$\alpha h^{p_1} \leq |I(f) - I_1(f)|$$

mit einem $\alpha > 0$ richtig ist, wobei h der Abstand der Stützstellen ist. Weiter soll I_2 mindestens die Ordnung $p_2 > p_1$ haben, es soll also

$$|I(f) - I_2(f)| \leq \beta h^{p_2}$$

mit $\beta > 0$ vorliegen.

a) Zeigen Sie, dass unter den gegebenen Voraussetzungen für genügend kleine $h > 0$ die a posteriori Fehlerabschätzung

$$(1 + \frac{\beta}{\alpha} h^{p_2 - p_1})^{-1} |I_2(f) - I_1(f)| \leq |I(f) - I_1(f)| \leq (1 - \frac{\beta}{\alpha} h^{p_2 - p_1})^{-1} |I_2(f) - I_1(f)|$$

gilt. Interpretieren Sie dieses Ergebnis für $h \to 0$.

b) Wählen Sie nun

$$I_1 = \text{summierte Trapezregel} \qquad I_2 = \text{summierte Simpsonregel}$$

und implementieren Sie den resultierenden a posteriori Fehlerschätzer für die summierte Trapezregel. Testen Sie den Fehlerschätzer an dem Integral

$$I(f) = \int_0^\pi \sin(x) dx.$$

Stellen Sie dazu in einer Graphik den geschätzten und den tatsächlichen Quadraturfehler der summierten Trapezregel über der inversen Schrittweite $m = \frac{\pi}{h}$ für $m = 2, 4, 6, 8, ..., 1000$ dar, und interpretieren Sie die Ergebnisse.