Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Maren-Wanda Wolf

6. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

SoSe 2016

Abgabe: 9.6.2016

1. Aufgabe (4 TP)
Beweisen Sie Satz 3.2 im Skript.

2. Aufgabe (4 TP)
Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x(t) + 2te^{2t} \qquad \text{für } 0 < t \leq T, \\ x(0) &= x_0 \ . \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Lösung $x(t)$ dieses Anfangswertproblems. Plotten Sie diese für $T = 10$ und $x_0 = 1$ auf dem Intervall $[0, 10]$.

b) Betrachten Sie jetzt dieselbe Differentialgleichung, nun allerdings mit dem gestörten Anfangswert $\tilde{x}_0 = 1.001$. Plotten Sie für $t \in [0, 10]$ die Lösung $\tilde{x}(t)$ dieses gestörten Anfangswertproblems. Plotten Sie ferner den Fehler $|x(t) - \tilde{x}(t)|$. Was beobachten Sie?

3. Aufgabe (3 TP)
Wir wollen ein Modell für das Wachstum einer Bakterienkultur entwickeln. Die Vermehrung der Bakterien soll dabei durch Teilung erfolgen. Bekannt sei die Anzahl x_0 der Bakterien zum Zeitpunkt $t = 0$ und gesucht sei

$$x(t): \qquad \text{Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt } t > 0.$$

a) Es sei $p\Delta t$, $p \in (0, 1)$ die Wahrscheinlichkeit, daß sich ein Bakterium während eines „kleinen“ Zeitintervalles Δt teile. Stellen Sie auf Grundlage dieser Annahme eine Differentialgleichung für x auf.

b) Das in Aufgabenteil a) entwickelte Modell soll verbessert werden. Wir nehmen nun zusätzlich an, daß Konkurrenz zweier Bakterien innerhalb des „kleinen“ Zeitintervalles Δt zum Absterben von

$$\Delta x_{\text{kon}} = kx(t)^2 \, \Delta t \,, \qquad k > 0 \,,$$

Bakterien führe. Die Konzentration der Bakterien sei dabei für alle Zeiten ortsunabhängig. Stellen Sie ein verbessertes Modell für das Bakterienwachstum auf, d.h. geben Sie eine Differentialgleichung für x an, die sowohl Vermehrung als auch Konkurrenz berücksichtigt.