Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Maren-Wanda Wolf

7. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

SoSe 2016

Abgabe: 16.6.2016

1. Aufgabe (2 TP)
Zur Differentialgleichung

$$x'(t) = \lambda x(t)\,, \qquad 0 < t \leq T \tag{1}$$

seien $x_\Delta, \tilde{x}_\Delta$, die mit dem expliziten Euler-Verfahren berechneten Näherungslösungen zu den Anfangswerten $x_0, \tilde{x}_0$. Beweisen Sie, dass für $\lambda < 0$ und $\tau > \frac{-2}{\lambda}$ die folgende Aussage gilt:

$$\|x_\Delta - \tilde{x}_\Delta\|_\infty = |1 + \tau\lambda|^n |x_0 - \tilde{x}_0|.$$

Erklären Sie, was dies für die Stabilität des expliziten Euler-Verfahrens bedeutet.

2. Aufgabe (3 PP + 3 TP)
Schreiben Sie ein `matlab`-Programm `[x,t] = exEuler(f,x0, T, tau)`, das das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(0) = x_0$$

im Intervall $(0, T]$ mit dem expliziten Euler-Verfahren zur Schrittweite τ numerisch löst und die Lösung x_k sowie die Zeitpunkte t_k zurückgibt.

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x'(t) = -2tx(t), \qquad x(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \tag{2}$$

durch gezieltes Raten analytisch.

b) Diskretisieren Sie das Anfangswertproblem (2) mit dem expliziten Euler-Verfahren und geben Sie eine geschlossene Darstellung der der resultierenden Gitterfunktion für feste Schrittweite $\tau > 0$ an.

c) Lösen Sie (2) im Intervall $(0, 30]$ numerisch mit Ihrem Programm `exEuler`, für $\tau = \frac{16}{60}, \frac{8}{60}, \frac{4}{60}, \frac{2}{60}, \frac{1}{60}$.

d) Visualisieren Sie die von Ihnen erzielten Resultate sinnvoll. Was beobachten Sie? Erklären Sie ihre Beobachtungen.

3. Aufgabe (3 TP)
Zur Differentialgleichung (1) aus Aufgabe 1 für $\lambda > 0$ seien $x_\Delta, \tilde{x}_\Delta$, die mit dem impliziten Euler-Verfahren gewonnenen Näherungslösungen zu den Anfangswerten x_0 bzw. $\tilde{x}_0$. Zeigen Sie, dass unter der Schrittweitenbeschränkung $\tau < \frac{1}{\lambda}$ die folgende Abschätzung für die diskrete Kondition des impliziten Euler-Verfahrens gilt:

$$\|x_\Delta - \tilde{x}_\Delta\|_\infty \leq e^{\frac{T\lambda}{1-\tau\lambda}} |x_0 - \tilde{x}_0|.$$