Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Maren-Wanda Wolf

8. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

SoSe 2016

Abgabe: 23.6.2016

1. Aufgabe (6 TP)
Zur Lösung des Anfangswertproblems

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t)\,, \qquad 0 < t \leq T\,, \qquad x(0) = 1,$$

für $\lambda \in R$ sei die folgende Klasse von numerischen Verfahren gegeben (aus naheliegenden Gründen auch als θ-Verfahren bekannt):

$$x_{k+1} = x_k + \tau(1-\theta)(\lambda x_k + f(t_k)) + \tau\theta(\lambda x_{k+1} + f(t_{k+1})).$$

Wir wollen in dieser Aufgabe $f \equiv 0$ annehmen.

a) Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des oben angegebenen Verfahrens für $\theta \in [0,1]$. Welche Voraussetzungen an x benötigen Sie jeweils?

b) Untersuchen Sie das Verfahren im Falle $\theta = \frac{1}{2}$ auf Stabilität.

2. Aufgabe (5 PP)
Schreiben Sie ein `matlab`-Programm `[x,t] = theta_lin(theta,lambda,f,x0,T,tau)`, das das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t), \qquad\qquad x(0) = x_0$$

im Intervall $(0, T]$ mit dem θ-Verfahren

$$x_{k+1} = x_k + \tau(1-\theta)(\lambda x_k + f(t_k)) + \tau\theta(\lambda x_{k+1} + f(t_{k+1})).$$

für $\theta \in [0,1]$ zur Schrittweite τ numerisch löst und die Lösung x_k sowie die Zeitpunkte t_k an allen Gitterpunkten zurückgibt.

a) Gegeben seien $f(t) = 4\pi \cos(4\pi t) - \lambda \sin(4\pi t)$, $\lambda = -1$, $x_0 = 1$ und $T = 2$. Approximieren Sie für $\tau = T/100$ eine Lösung des Anfangswertproblem jeweils für $\theta = 0, 0.5, 1$, und plotten Sie diese gegen die exakte Lösung.

b) Wählen Sie Schrittweiten $\tau = T/n$ mit geeigneten $n \in 10, \ldots, 10^5$. Plotten Sie den Diskretisierungsfehler über n in einer geeigneten Skala, so dass man die Konvergenzordnung der drei Verfahren ablesen kann.