

9. Übung zur Vorlesung
COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK II
SoSe 2016

Abgabe: 30.6.2016

1. Aufgabe (6 TP + 3 PP)

In dieser Aufgabe soll ein Verfahren mit Konsistenzordnung 2 eingehend untersucht werden.

- a) Es sei $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hinreichend glatt. Geben Sie die Taylorentwicklung von $x(t + \tau)$ und $x(t + 2\tau)$ um $t \in \mathbb{R}$ mit Restglied dritter Ordnung an. Bestimmen Sie Koeffizienten $A, B, C \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$x'(t) = \frac{1}{\tau} (Ax(t) + Bx(t + \tau) + Cx(t + 2\tau)) + \mathcal{O}(\tau^2)$$

gilt.

- b) Diese Gleichung legt nahe, $x'(t_k)$ unter Vernachlässigung des Terms $\mathcal{O}(\tau^2)$ durch die rechte Seite zu approximieren. Dies ergibt eine Verfahren zur Lösung der Differentialgleichung

$$x'(t) = \mu x(t) + f(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, T]$$

auf dem Gitter $t_k = \tau k$. Da zur Berechnung von x_{k+1} die Werte x_k und x_{k-1} benötigt werden, soll x_1 durch einen Schritt des expliziten Euler-Verfahrens bestimmt werden. Geben Sie eine Rekursionsformel zur Auswertung von x_{k+1} an, und zeigen Sie, dass das Verfahren die Konsistenzordnung 2 besitzt.

- c) Implementieren Sie das Verfahren als `[x, t] = taylor2(mu, x0, T, tau)`, und testen Sie es für $f = 0$, $\mu = -1, -2, -3$ und $T = 1$ mit verschiedenen Schrittweiten τ . Was beobachten Sie? Ist das Verfahren konvergent? Interpretieren Sie die Ergebnisse vor dem Hintergrund des Konvergenzbeweises für ein konsistentes Verfahren aus der Vorlesung.

- d) Interpretieren Sie für $f = 0$ und $\mu < 0$ das Verfahren als Dreitermrekursion und geben Sie eine geschlossene Darstellung der Gitterfunktion an. Zeigen Sie, dass das Verfahren für keine Wahl von τ stabil ist. Beweisen Sie dazu, dass für jede Schrittweite die diskrete Kondition nicht gleichmäßig in t beschränkt ist, indem Sie

$$\|x_\Delta - \tilde{x}_\Delta\|_\infty \geq c(k)|x_0 - \tilde{x}_0|$$

mit einer Folge $c(k) \rightarrow \infty$ zeigen.

Hinweis: Verwenden Sie die umgekehrte Dreiecksungleichung.

2. Aufgabe (4 TP)

Eine Differentialgleichung $x'(t) = f(x(t), t)$ heißt autonom, wenn f nicht explizit von der freien Variable t abhängt, d.h. wenn $f(x, t) = f(x)$ gilt. Geben Sie für das nichtautonome Anfangswertproblem zweiter Ordnung

$$x''(t) = \lambda x(t) + \mu e^t \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \quad x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$$

ein äquivalentes lineares, autonomes Anfangswertproblem erster Ordnung

$$u'(t) = Au(t) \quad u(0) = u_0, \quad u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

mit konstanter Matrix A an.

Hinweis: Setzen Sie $u_3(t) = \mu e^t$.