NUMERIK 1

Sommersemester 2016

KLAUSUR – LÖSUNGSVORSCHLAG

Aufgabe 1 (Multiple Choice) **(ca. 20 Minuten, 8 Punkte)**

Kreuzen Sie korrekte Aussagen an. Es können mehrere Antworten richtig sein, mindestens eine ist korrekt. Eine Aufgabe gilt als erfolgreich gelöst, wenn alle richtigen Antworten angekreuzt sind und keine falsche. Für jede gelöste Aufgabe gibt es 2 Punkte. Es werden keine Punkte abgezogen.

(a) Für $f \in C[a,b]$ betrachte man die Quadraturformel

$$\hat{I}(f) = (b-a)\sum_{i=0}^{n} \mu_i f(x_i)$$

mit $n+1$ Stützstellen $a \leq x_0 < ... < x_n \leq b$ und Gewichten μ_i. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

☒ Es gibt eine Quadraturformel mit zwei Stützstellen $x_0 < x_1$, die für alle Polynome $p \in \mathcal{P}_3$ exakt ist. *(Lösung: Gauß-Quadratur)*

☐ Für zwei beliebig vorgegebene Stützstellen $x_0 < x_1$ gibt es stets geeignete Gewichte μ_0, μ_1, so dass die zugehörige Quadraturformel für alle Polynome $p \in \mathcal{P}_2$ exakt ist. *(Gegenbeispiel: wähle $x_0 = a$, $x_1 = b$ und zwei verschiedene Parabeln mit gleichen Stützwerten.)*

☒ Es gibt eine Quadraturformel mit drei Stützstellen $a = x_0 < x_1 < x_2 = b$, die für alle Polynome $p \in \mathcal{P}_3$ exakt ist. *(Lösung: Simpsonregel)*

(b) Für welche der folgenden Normen auf $\mathbb{R}^3$ existiert eine eindeutige Bestapproximation von $y = (3,5,2)$ in dem Unterraum $U = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_3 = 0\}$?

☒ $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i^2}$ ☒ $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{3} |x_i|$ ☐ $\|x\|_\infty = \max_{i=1,2,3} |x_i|$ ☐ keine

(Lösung: Für $||\cdot||_2$ ist der Raum streng konvex. Für $||\cdot||_1$ rechnet man nach.)

(c) Es sei in $f \in C^2[-1,1]$, $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$, und $v : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $v(x) = 0\ \forall x \in [-1,1]$. Betrachte das Gitter $\Delta = \{-1,0,1\}$. Es gilt:

☒ v ist Lösung der Interpolationsaufgabe

$$s_n \in S^1_\Delta : \ s_n(x_k) = f(x_k)\ \forall x_k \in \Delta.$$

☒ v ist Lösung der Interpolationsaufgabe

$$s_n \in S^3_\Delta : \ s_n(x_k) = f(x_k)\ \forall x_k \in \Delta$$

mit natürlichen Randbedingungen.

☒ v ist Lösung der Interpolationsaufgabe

$$s_n \in S^3_\Delta : s_n(x_k) = f(x_k)\ \forall x_k \in \Delta$$

mit vollständigen Randbedingungen.

(*Lösung: Es gilt $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$ und $f'(-1) = f'(1) = 0$. Die Nullfunktion ist linear und damit in S^1_Δ und in S^3_Δ; außerdem erfüllt sie $v''(-1) = v''(1) = 0$ und somit die natürlichen Randbedingungen.*)

(d) Welche der folgenden Butcher-Schemata charakterisieren ein explizites Runge-Kutta-Verfahren 2. Stufe?

☐ $\begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$ ☐ $\begin{array}{c|cc} & 0 & 0 \\ & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$ ☒ $\begin{array}{c|cc} & 0 & 0 \\ & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$ ☐ $\begin{array}{c|ccc} & 0 & & \\ & 1/3 & 0 & \\ & 0 & 2/3 & 0 \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$

Aufgabe 2 (Verschiedende kurze Aufgaben) **(ca. 25 Minuten, 8 Punkte)**

Es sind *kurze* und *richtige* Begründungen gefragt.

(a) (2 Punkte) Es sei eine QR-Zerlegung der nichtsingulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben. Weiter sei $b \in \mathbb{R}^n$. Existiert ein Algorithmus, welcher das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ in $\mathcal{O}(n^2)$ Flops (Gleitkommaoperationen) löst?

Lösung:

Ja, $y = Q^\top b$, $x = R^{-1}y$. Beide Operationen sind in $\mathcal{O}(n^2)$ Flops realisierbar: Matrix-Vektor-Produkt bzw. Rückwärtssubstitution.

(b) (3 Punkte) Für das Anfangswertproblem $x'(t) = x(t)$, $x(0) = 1$, wurde der Wert $x(1)$ mithilfe folgender Runge-Kutta-Verfahren bestimmt:

- Verfahren von Runge
- Explizites Eulerverfahren
- klassisches Runge-Kutta-Verfahren (RK4)

In Abbildung 1 ist der Fehler $|x(1) - x_\Delta(1)|$ in Abhängigkeit der Schrittweite $\tau = \frac{1}{N} > 0$ (für verschiedene N mit $1 \leq N \leq 10^3$) bei äquidistantem Gitter $\Delta = \{t_k = k\tau | k = 0, ..., N\}$ dargestellt.

(b1) Bestimmen Sie anhand der Abbildung die Ordnung des Verfahrens, das zum Graphen C gehört.

(b2) Ordnen Sie die Graphen A, B, C den gegebenen Verfahren zu.

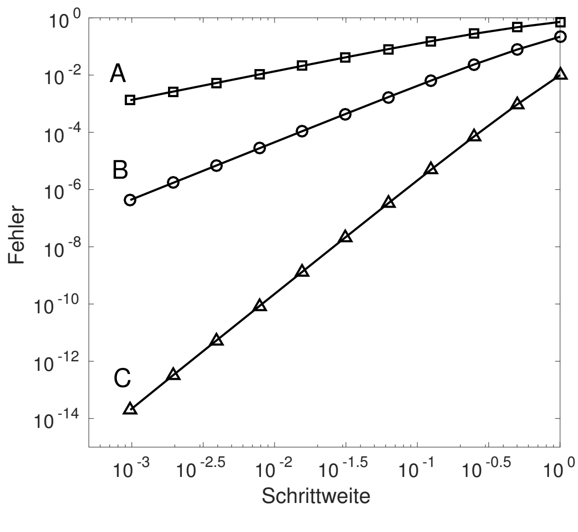

Abbildung 1: Fehler in Abhängigkeit der Schrittweite $\tau > 0$.

Lösung:

(b1)

Auf doppeltlogarithmischer Skala ist die Ordnung gerade durch die Steigung des Graphen gegeben, hier also $p = 4$.

(b2) Tragen Sie ein:

- Verfahren von Runge: B
- Explizites Eulerverfahren: A
- klassisches Runge-Kutta-Verfahren: C

(c) (3 Punkte) Das Polynom $x^5 - 2x$ hat im Intervall $(1, 2)$ eine eindeutige Nullstelle x_*. Um die zu berechnen, verwenden wir Fixpunktiteration mit Startwert $x_0 \neq x_*$ und den Iterationsfunktionen $\phi_1(x) = x^5 - x$, $\phi_2(x) = (2x)^{1/5}$ und $\phi_3(x) = \log_{10}(x^5)/2$. Für welche Iterationsfunktionen kann die Iteration *nicht* gegen x_* konvergieren?

Lösung:

$\phi_1'(x) = 5x^4 - 1 > 1$ für alle $x \in (1, 2)$, und $\phi_2'(x_*) = \frac{2}{5} x_*^{-4/5} < \frac{2}{5}$ in $(1, 2)$. Damit konvergiert die Iteration für ϕ_1 nicht, und für ϕ_2 lokal schon. Die Funktion ϕ_3 hat den falschen Fixpunkt!

Aufgabe 3 (Hermite-Iterpolation) **(ca. 10 Minuten, 3 Punkte)**

Lösen Sie die Hermite'sche Interpolationsaufgabe

$$p \in \mathcal{P}_2 : \; p(0) = 1, \, p'(0) = s \in \mathbb{R}, \, p(1) = 0$$

in Abhängigkeit von s.

Lösung:

1. Möglichkeit: Neville-Tableau:

k	x_k	$f[x_k]$	$f[x_{k-1}, x_k]$	$f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k]$
0	0	1		
1	0	1	s	
2	1	0	$\frac{0-1}{1-0} = -1$	$\frac{-1-s}{1-0} = -1 - s$

Damit ist die Lösung gegeben durch

$$\begin{aligned} p_2(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= 1 + sx - (s+1)x^2. \end{aligned}$$

2. Möglichkeit: Setze $p_2(x) = ax^2 + bx + c$ und bestimme die Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$ mithilfe der gegebenen Gleichungen. Aus $p(0) = 1$ folgt $c = 1$. Aus $p'(x) = 2ax + b$ und $p'(0) = s$ folgt $b = s$. Damit ergibt sich $p(1) = a + s + 1 = 0$, also $a = -s - 1$. Insgesamt ergibt sich $p_2(x) = -(s+1)x^2 + sx + 1$.

Aufgabe 4 (Affininvarianz der Newton-Iteration) **(ca. 15 Minuten, 4 Punkte)**

Das Newton-Verfahren für die Berechnung der Nullstelle der stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liefere die Folge $\{x_k\}_{k\geq 0}$. Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $g(x) := f(ax)$ gegeben, dabei ist $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Für die Funktion g liefere das Newton-Verfahren die Iterierten $\{y_k\}_{k\geq 0}$. Zeigen Sie: falls $y_0 = a^{-1}x_0$, so gilt $y_k = a^{-1}x_k$ für alle $k \geq 0$.

Lösung:

Die Newtoniteration für y_k lautet $y_{k+1} = y_k - \frac{g(y_k)}{g'(y_k)}$. Außerdem gilt mit der Kettenregel $g'(y) = af'(ay)$. Beweis durch Induktion: Für $k = 0$ gilt die Aussage, und mit der Induktionsvoraussetzung ergibt sich

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k - \frac{g(y_k)}{g'(y_k)} \\
&= y_k - \frac{f(ay_k)}{af'(ay_k)} \\
&\overset{i.V.}{=} a^{-1}x_k - a^{-1}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\
&= a^{-1}x_{k+1}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5 (Lineares Ausgleichsproblem) **(ca. 15 Minuten, 4 Punkte)**

In der Modellfunktion $w(t) = p_1 + p_2 t$ sollen die unbekannten Parameter p_1, p_2 anhand von Messungen (t_i, w_i), $i = 1, \dots, m$, über das lineare Ausgleichsproblem

$$\sum_{i=1}^{m} (p_1 + p_2 t_i - w_i)^2 = \min!$$

bestimmt werden. Man kann das Problem in der Form $\|Ap - b\|_2^2 = \min!$, $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ schreiben.

(a) Geben Sie A und b an.

(b) Zeigen Sie ohne Verwendung der QR-Zerlegung, dass der Parametervektor $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$\begin{pmatrix} m & \sum t_i \\ \sum t_i & \sum t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum w_i \\ \sum t_i w_i \end{pmatrix},$$

mit $\sum x_i := \sum_{i=1}^{m} x_i$.

Lösung:
(a).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_m \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}.$$

(b). *1. Möglichkeit:* Aus der Normalengleichung $A^\top A \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = A^\top b$ folgt die Behauptung.

2. Möglichkeit: Der Ausdruck

$$f(p) := \sum_{i=1}^{m} (p_1 + p_2 t_i - w_i)^2$$

ist minimal, wenn ihre Ableitung nach p_1 und nach p_2 verschwindet. Also

$$0 \overset{!}{=} \frac{\partial f}{\partial p_1} = \sum_{i=1}^{m} 2(p_1 + p_2 t_i - w_i),$$
$$0 \overset{!}{=} \frac{\partial f}{\partial p_2} = \sum_{i=1}^{m} 2(p_1 + p_2 t_i - w_i) t_i.$$

Umformen ergibt

$$\sum_{i=1}^{m} (p_1 + p_2 t_i) = \sum_{i=1}^{m} w_i,$$
$$\sum_{i=1}^{m} (p_1 + p_2 t_i) t_i = \sum_{i=1}^{m} w_i t_i,$$

und das entspricht der gegebenen Gleichung.