Aufgabe 1

Zeigen Sie:

- (a) Ist V mit Norm $\|\cdot\|$ ein Prähilbertraum, so gilt:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

- (b) Für $V = \mathbb{R}^d$ mit der Supremumsnorm $\|x\|_\infty = \max_{k=1,\dots,d} |x_k|$ existiert kein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty$ mit der Eigenschaft

$$\|x\|_\infty = \sqrt{\langle x, x \rangle_\infty}$$

Aufgabe 2

- (a) Gesucht ist ein Polynom zweiten Grades $p \in \mathcal{P}_2$, für das gilt:

$$p(1) = 4 \quad p'(1) = 3 \quad p'(2) = 7.$$

Leiten Sie ein Gleichungssystem für die Koeffizienten des Polynoms her und lösen Sie dieses, um das Interpolationspolynom zu bestimmen.

- (b) Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ und $x_1 > x_0$ beliebig. Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p \in \mathcal{P}_1$ mit

$$p(x_0) = f(x_0) \quad p(x_1) = f(x_1).$$

Zeigen Sie, dass das Interpolationspolynom für $x_1 \rightarrow x_0$ punktweise gegen das Polynom $p_* \in \mathcal{P}_1$ konvergiert, das das Hermite-Interpolationsproblem

$$p_*(x_0) = f(x_0) \quad p'_*(x_0) = f'(x_0).$$

löst.

Aufgabe 3

Gegeben ist die gewöhnliche Differentialgleichung für $z(t) = (x(t), y(t))$

$$z'(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ -x(t) \end{pmatrix} \quad z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

- (a) Für das Runge-Kutta-Verfahren $z_{k+1} = \psi^\tau z_k$ mit dem Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

gilt für alle $\tau > 0$:

$$\|z_k\| \rightarrow \infty.$$

- (b) Für das Runge-Kutta-Verfahren $z_{k+1} = \psi^\tau z_k$ mit dem Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|c} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

gilt für alle $\tau > 0$:

$$\|z_k\| = 1 \quad \forall k.$$

Aufgabe 4

Kreuzen Sie korrekte Aussagen an. Es können mehrere Antworten richtig sein, mindestens eine ist korrekt. Eine Aufgabe gilt als erfolgreich gelöst, wenn alle richtigen Antworten angekreuzt sind und keine falsche. Für jede gelöste Aufgabe gibt es 2 Punkte. Es werden keine Punkte abgezogen.

- (1) Es sei S_{Δ}^3 der Raum aller kubischen Splinefunktionen zu den Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$. Welche der folgenden Funktionen sind aus S_{Δ}^3 ?

$f(x) = x^3 - x^2$
 $f(x) = x^2(x-6) - (x-2)^3$
 $f(x) = \max\{0, (x-1)^3\} - \frac{1}{2}x^3$
 $f(x) = x^3 - |x|$

- (2) Der diskrete Fluss eines Runge-Kutta-Verfahrens ist gegeben durch

$$\psi^\tau x = x + \tau \frac{1}{2}(f(x) + f(\psi^\tau x)).$$

Welche Butcher-Schemata charakterisieren dieses Verfahren?

$\begin{array}{c|cc} & 0 & 0 \\ \hline 1/2 & 1/2 & \\ \hline 1/2 & 1/2 & \end{array}$
 $\begin{array}{c|cc} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & \\ \hline 0 & 1 & \end{array}$
 $\begin{array}{c|cc} & 1/2 & 1/2 \\ \hline 1/2 & 0 & \\ \hline 1/2 & 1/4 & \end{array}$
 $\begin{array}{c|cc} & 0 & 0 \\ \hline 1/4 & 1/4 & \\ \hline 3/4 & 1/4 & \end{array}$

- (3) Seien $f \in C([a, b])$ und Stützstellen $x_0, x_1, x_2 \in [a, b]$ beliebig. Betrachten wir die folgenden Polynome

- $p_1 \in \mathcal{P}_1$: Das Interpolationspolynom zu x_0, x_2
- $p_2 \in \mathcal{P}_2$: Das Interpolationspolynom zu x_0, x_1, x_2
- $q_1 \in \mathcal{P}_1$: Die Bestapproximation von f bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ in $\mathcal{P}_1$
- $q_2 \in \mathcal{P}_2$: Die Bestapproximation von f bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ in $\mathcal{P}_2$

so gilt:

$\|f - p_2\|_\infty \leq \|f - p_1\|_\infty$
 $\|f - q_2\|_\infty \leq \|f - q_1\|_\infty$
 $\|f - q_2\|_\infty \leq \|f - p_2\|_\infty$
 $\|f - p_1\|_\infty \leq \|f - q_2\|_\infty$

- (4) Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit euklidischem Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$. Betrachte die Funktion $P : V \rightarrow U$ mit $U = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_2 = 0\} \subset V$

$$Px = (x_1 + x_2, 0).$$

Dann ist P

- eine Projektion, aber keine Orthogonalprojektion
 keine Projektion
 eine Orthogonalprojektion, aber keine Projektion
 eine Orthogonalprojektion

- (5) Das Minimum $x^* = 0$ der Funktion $f(x) = x^4 - 1$ soll numerisch berechnet werden. Bekanntlich gilt im Minimum $f'(x^*) = 0$. Wir betrachten deshalb die Fixpunktiteration für $\phi(x) = f'(x) + x$ und das Newton-Verfahren für $g(x) = f'(x)$.

- Die Fixpunktiteration konvergiert für jeden Startwert.
 Das Newtonverfahren konvergiert für jeden Startwert.
 Das Newtonverfahren konvergiert für jeden Startwert quadratisch.
 Das Newtonverfahren konvergiert für keinen Startwert quadratisch außer für $x_0 = x^*$.