NUMERIK 1

Sommersemester 2016

— AUFGABENBLATT 2 —

Abgabetermin: Donnerstag, 12. Mai 2016, 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (Newton-Iteration, 3 TP + 3 PP)
Betrachten Sie das Nullstellenproblem $f(x) = x(x-\pi)^2 = 0$ mit den zwei Nullstellen $x^* = 0$ und $x^{**} = \pi$.

a) Wenden Sie das Newton-Verfahren auf das Nullstellenproblem an, starten Sie dieses einmal mit $x_0 = -1$ und einmal mit $y_0 = 4$. Stellen Sie die Fehler $|x_n - \xi|$ und $|y_n - \xi|$ halblogarithmisch über n dar; hierbei bezeichnet $\xi \in \{x^*, x^{**}\}$ die jeweilige Nullstelle, gegen die die Folge $\{x_n\}$ bzw. $\{y_n\}$ konvergiert.

Hinweis: Verwenden Sie das Matlab-Programm `semilogy`.

b) Welche Konvergenzgeschwindigkeiten beobachten Sie? Stimmt dies mit Ihren Erwartungen überein? Begründen Sie das beobachtete *qualitativ*.

Hinweis: Denken Sie an die Kondition des Nullstellenproblems und an den Konvergenzsatz aus der Vorlesung.

c) Sei nun ξ die zur Folge $\{y_n\}$ gehörige Nullstelle, und sei $\tilde{y}_n := y_n - \xi$. Geben Sie $\tilde{y}_n$ in Abhängigkeit von $\tilde{y}_0$ an und erklären Sie damit *quantitativ* Ihre Beobachtung aus a).

d) Betrachten wir das Nullstellenproblem für $g(x) := f(x) + 10^{-6}$. Was ergibt das Newton-Verfahren für die obigen Startwerte x_0 und y_0? Erklären Sie das Beobachtete.

e) Implementieren Sie das Newton-Verfahren mit natürlichem Monotonietest. Was ergibt dieses für die Iterationen aus d)?

Aufgabe 2 (Bestapproximation, 4 TP)
Gegeben sei der normierte Vektorraum $V = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, der Unterraum
$U = \{u = (u_1, u_2) \in V : u_1 - u_2 = 0\}$ sowie $f = (2,4) \in V$.

a) Formulieren Sie die entsprechende Bestapproximationsaufgabe. Ist sie lösbar? Ist eine etwaige Lösung eindeutig?

b) Geben Sie die zur Bestapproximationsaufgabe äquivalente Normalengleichung an.

c) Laut Skript läßt sich die Bestapproximationsaufgabe $p \in U$ über eine orthogonale Projektion P charakterisieren. Wie lautet der Zusammenhang? Geben Sie die Projektion P explizit an und berechne damit die Bestapproximationsaufgabe $p \in U$ an $f = (2,4)$.

Aufgabe 3 (Prähilbertraum, 2 TP)
Zeigen Sie, dass ein Prähilbertraum strikt konvex ist.

Hinweis: In einem Prähilbertraum gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.