NUMERIK 1

Sommersemester 2016

— AUFGABENBLATT 3 —

Abgabetermin: Donnerstag, 19. Mai 2016, 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (Projektionen, 2 TP)
Sei X ein Prähilbertraum und $P : X \to X$ linear. Zeigen Sie, dass dann folgende Aussagen äquivalent sind:

a) $(x - Px, y) = 0$ für alle $x \in X, y \in R(P) = \{Pw \mid w \in X\}$

b) $P^2 = P$ und $(Px, y) = (x, Py)$ für alle $x, y \in X$

Aufgabe 2 (Approximation stetiger Funktionen, 4 TP)
Sei $V = C[-1, 1]$, $f(x) = 3x^3$ und $U = \mathcal{P}_2$. Berechnen Sie die Tschebyscheff- und die L^2-Approximation von f in U. Ermitteln Sie den Fehler der beiden Approximationen in der Supremums- sowie der L^2-Norm.

Aufgabe 3 (Tschebyscheff-Polynome, 4 TP)
Die *Tschebyscheff-Polynome 1. Art* sind gegeben durch

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \quad n = 0, 1, \ldots$$

(vgl. Skript). Zeigen Sie:

a) Die Polynome erfüllen die Dreiterm-Rekursion

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Hinweis: Es gilt $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$.

b) Es ist T_n ein Polynom n-ter Ordnung, und es gilt $||T_n||_\infty \leq 1$ für alle $n = 0, 1, \ldots$.

c) Die Polynome $(T_n)_{n=0}^\infty$ bilden *keine* Orthogonalbasis bezüglich des L^2-Skalarproduktes.

d) Die Polynome $(T_n)_{n=0}^\infty$ bilden eine Orthogonalbasis bezüglich des gewichteten Skalarproduktes

$$(v, w) = \int_{-1}^{1} \frac{v(x)\, w(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$$

Hinweis: Es gilt $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$.

Aufgabe 4 (Orthogonalbasis, 2 TP)
Es sei $(\varphi_i)_{i=0}^n$ eine Orthogonalbasis von $\mathcal{P}_n \subset C[-1, 1]$ bezüglich des Skalarproduktes

$$(v, w) = \int_{-1}^{1} v(x)w(x)\, dx, \quad v, w \in C[-1, 1].$$

Mithilfe einer Transformation $\tau : [a, b] \to [-1, 1]$ wird über $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i \circ \tau$ eine Basis $(\tilde{\varphi}_i)_{i=0}^n$ von $\mathcal{P}_n \subset C[a, b]$, $a < b$, für das Skalarprodukt

$$(v, w) = \int_a^b v(y)w(y)\, dy, \quad v, w \in C[a, b]$$

definiert. Bestimmen Sie eine möglichst einfache Funktion τ so, dass auch $(\tilde{\varphi}_i)_{i=0}^n$ eine Orthogonalbasis ist.

Aufgabe 5 (Newton-Fraktal, freiwillige Zusatzaufgabe)
Implementieren Sie das gedämpfte Newton-Verfahren für die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^3 - 1$, und analysieren Sie das Konvergenzverhalten in Abhängigkeit vom Startwert der Iteration. Führen Sie dazu die Newton-Iteration für ein Gitter von Startpunkten aus und plotten Sie diese Punkte farblich in der komplexen Ebene, wobei die Farbe die Nullstelle bezeichnet, gegen die die Iteration konvergiert. Untersuchen Sie, wie das Bild sich ändert, wenn man den Dämpfungsfaktor variiert.