NUMERIK 1

Sommersemester 2016

— AUFGABENBLATT 4 —

Abgabetermin: Donnerstag, 26. Mai 2016, 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (Givens-Rotation, 2 TP + 2 PP)

Berechnen Sie zu einem Gitter $0 = x_0 < x_1 < ... < x_m = 2\pi$ mit $m+1$ Gitterpunkten das Polynom $p_n \in \mathcal{P}_n$ vom Grad n, das die folgende Bestapproximationsaufgabe löst:

$$\sum_{i=0}^{m}(p_n(x_i) - \sin(x_i))^2 \leq \sum_{i=0}^{m}(q_n(x_i) - \sin(x_i))^2 \quad \forall q_n \in \mathcal{P}_n$$

a) Schreiben Sie die Bestapproximationsaufgabe in Form eines linearen Ausgleichsproblems

$$x \in \mathbb{R}^{n+1}: \quad \|b - Ax\|_2 \leq \|b - Ay\|_2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^{n+1}$$

b) Schreiben Sie ein `MATLAB`-Programm, das das lineare Ausgleichsproblem mittels Givens-Rotationen löst. Testen Sie Ihr Programm für mehrere Gitter mit verschiedenen Werten für m und $n \leq m$. Welches Resultat erhält man für $m = n$?

Aufgabe 2 (Kleinste Fehlerquadrate, 3 TP + 1 PP)

Für diese Aufgabe sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$ mit vollem Spaltenrang und $b \in \mathbb{R}^m$.

(a) Es sei $\tilde{Q}\tilde{R} = (A\ b) \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ die reduzierte QR-Zerlegung der um die Spalte b ergänzten Matrix A. Die Diagonale von $\tilde{R}$ ist dabei positiv.
Zeigen Sie: Mit $\tilde{R} = \begin{pmatrix} R & r \\ & \rho \end{pmatrix}$, wobei $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $r \in \mathbb{R}^n, \rho \in \mathbb{R}$, gilt für die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ des linearen Ausgleichsproblems

$$\|b - Ax\|_2 = \min!$$

dass

$$Rx = r, \qquad \rho = \|b - Ax\|_2.$$

(b) Geben Sie ein `MATLAB`-Programm an, das die Methode aus (a) implementiert, um das Ausgleichsproblem *ohne Verwendung* von Q zu lösen.

Aufgabe 3 (Householder-Reflexion, 4 PP)

Programmieren Sie die QR-Zerlegung mittels der Householder-Reflexion aus der Vorlesung. Testen Sie Ihr Programm und vergleichen Sie es mit dem klassischen Gram-Schmidt-Algorithmus (`gs.m` auf der Homepage) anhand der folgenden Matrix A:

```
U = qr(rand(30));
V = qr(rand(30));
S = diag(2.^(-1:-1:-30));
A = U*S*V;
```

Rechnen Sie dazu jeweils $\|Q^TQ - I\|$ und $\|QR - A\|$ aus um zu sehen, "wie orthogonal" das jeweilige Q ist bzw. wie gut das Produkt QR die Matrix A approximiert.

Aufgabe 4 (Abstand Punkt–Ebene, freiwillige Zusatzaufgabe)

Gegeben sei eine Matrix

$$B = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

deren linear unabhängige Spalten $b_1, \ldots, b_n$ den Unterraum $U \subset \mathbb{R}^m$ aufspannen. Weiterhin sei $x \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Geben Sie ein kurzes `MATLAB`-Programm an, welches für die Eingabe (B, x) den euklidischen Abstand von x zum Unterraum U berechnet. Begründen Sie, warum Ihr Programm das Gewünschte leistet.