NUMERIK 1

Sommersemester 2016

— AUFGABENBLATT 6 —

Abgabetermin: Donnerstag, 9. Juni 2016, 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (Kondition der Polynominterpolation, 4 TP)
Zeigen Sie, dass der Interpolationsoperator

$$C[a,b] \ni f \mapsto \varphi(f) = p_n \in \mathcal{P}_n$$

eine Projektion ist und die Norm $\|\varphi\|_\infty = \Lambda_n$ (Operatornorm) hat, wobei

$$\Lambda_n = \max_{x\in[a,b]} \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$$

die Lebesque-Konstante ist und L_k die Lagrange-Polynome bezeichnet.

Aufgabe 2 (Fehler der linearen Spline-Interpolation, 4 TP)
Es sei S^1_Δ die Menge der stetigen und stückweise linearen Funktionen bezüglich des Gitters $\Delta = \{x_0, ..., x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Für $g \in C[a,b]$ sei weiter $\|g\|_\infty = \max_{a\le x\le b} |g(x)|$, und wir bezeichnen die Interpolierte von g bezüglich S^1_Δ mit $s_1(g;\cdot)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\|s_1(g;\cdot)\|_\infty \le \|g\|_\infty$ für alle $g \in C[a,b]$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\|g - s_1(g;\cdot)\|_\infty \le 2\|g - s\|_\infty$ für alle $g \in C[a,b]$, $s \in S^1_\Delta$ gilt. Wie gut ist $s_1(g;\cdot)$ nun im Vergleich zu bestmöglichen Approximation bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm?

Hinweis: Verwenden Sie die Additivität von $s_1(g;\cdot)$ bezüglich g.

(c) Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Fehlerabschätzung aus der Vorlesung für die Polynominterpolation, siehe Satz 3.8 im Skript.

Aufgabe 3 (Spline-Interpolation, 4 PP)
In der Vorlesung wurde der Algorithmus zur Berechnung kubischer Splines mit vollständigen Randbedingungen vorgestellt.

a) Implementieren Sie den Algorithmus in `MATLAB`.

b) Testen Sie Ihr Programm an der Funktion $f(x) = \sqrt{1.5 + x}$ auf dem Intervall $[a,b] = [-1,1]$ mit äquidistanten Stützstellen. Berechnen Sie den Fehler zwischen $\phi_n(f) \in S^3_\Delta$ und f an der Stelle $x = -\frac{5}{16}\pi$ für $n = 4^i$, $i = 1, ..., 8$ und vergleichen Sie diesen Fehler mit der theoretische Fehlerschranke.

Hinweis: Für die dividierten Differenzen empfiehlt sich der `MATLAB`*-Operator* `diff` *zusammen mit der elementweisen Division „./“. Mit dem Befehl*

```
find(y <= x(k+1) & y >= x(k))
```

lassen sich die Indizes $i_{k_1}, \ldots, i_{k_m}$ der m Elemente finden, für die $x_i \le y_{i_{k_1}}, \ldots, y_{i_{k_m}} \le x_{i+1}$ gilt.

Aufgabe 4 (Raum der Splines, freiwillige Zusatzaufgabe)
Sei S^m_Δ der Raum der Splines m-ter Ordnung zum Gitter $\Delta = \{x_0, ..., x_n\}$. Zeigen Sie:

$$\dim S^m_\Delta = n + m.$$