NUMERIK 1

Sommersemester 2016

— AUFGABENBLATT 7 —

Abgabetermin: Donnerstag, 16. Juni 2016, 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (Exaktheit der Quadraturformel, 4 TP)

a) Zu einer gegebenen stetigen Funktion $f \in C[-1,1]$ betrachte man folgende Quadraturformel:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Zeigen Sie, dass diese Formel für Polynome vom Grad höchstens 3 exakt ist.

b) Zeigen Sie, dass es keine Quadraturformel mit $n+1$ Stützstellen geben kann, die alle Polynome Grades $2n+2$ exakt integriert.

Aufgabe 2 (Quadratur über Hermite- und Spline-Interpolation, 4 TP)

Gegeben seien eine stetig differenzierbare Funktion $f \in C^1[a,b]$ sowie Stützstellen $x_i = a + ih$, $i = 0, ..., n$, wobei $h = (b-a)/n$.

a) Konstruieren Sie eine Quadraturformel für $\int_a^b f(x)\,dx$ basierend auf einer stückweisen Hermite-Interpolation. (D.h. pro Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ wird ein Polynom dritten Grades unter Vorgabe von $f(x_i)$, $f'(x_i)$, $f(x_{i+1})$, $f'(x_{i+1})$ bestimmt und integriert.)

b) Konstruieren Sie eine Quadraturformel für $\int_a^b f(x)\,dx$ basierend auf vollständiger kubischer Spline-Interpolation. Was stellen Sie fest?

Aufgabe 3 (Newton-Côtes-Quadratur, 4 PP)

a) Implementieren Sie ein Verfahren zur summierten Newton-Côtes-Quadratur, indem Sie eine Funktion

```
y = newton_cotes_quad(f_handle,a,b,n,m)
```

schreiben, der ein Funktionen-Handle `f_handle`, Intervallgrenzen `a`, `b`, der zu verwendende Polynomgrad `n` (mit `n` $\in \{1, ..., 6\}$) und die Anzahl der Teilintervalle `m` übergeben werden. Geben Sie in `y` das Ergebnis der Quadratur zurück. Testen Sie Ihr Verfahren anhand geeigneter Monome x^i auf dem Intervall $[0,1]$ auf Richtigkeit.

b) Testen Sie Ihre Implementation an der Funktion $f(x) = \frac{2\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)}{x^2+4}$ auf dem Intervall $[0,2]$ für alle `n` $\in \{1, ..., 6\}$ und verschiedene Werte von `m`. Plotten Sie zu jedem `n` jeweils die Quadratur-Fehler bezüglich `m`. Verwenden Sie dabei eine doppelt logarithmische Darstellung, um die Konvergenzordnung abzulesen.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{\ln 2}{8}\pi$.