NUMERIK 1

Sommersemester 2016

— AUFGABENBLATT 8 —

Abgabetermin: Donnerstag, 23. Juni 2016, 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (Gauß-Quadratur, 4 PP)

a) Implementieren Sie ein Verfahren zur summierten Gauß-Quadratur, indem Sie eine Funktion

```
y = gauss_quad(f_handle,a,b,n,m)
```

schreiben, der ein Funktionen-Handle `f_handle`, Intervallgrenzen `a`, `b`, der zu verwendende Polynomgrad `n` (mit `n` $\in \{1, ..., 4\}$) und die Anzahl der Teilintervalle `m` übergeben werden. Geben Sie in `y` das Ergebnis der Quadratur zurück. Testen Sie Ihr Verfahren anhand geeigneter Monome x^i auf dem Intervall $[0, 1]$ auf Richtigkeit.

Hinweis: Sie müssen die Gewichte und Stützstellen nicht selbst berechnen, sondern dürfen die Werte aus der Literatur verwenden.

b) Testen Sie Ihre Implementation an der Funktion $f(x) = \frac{2\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)}{x^2+4}$ auf dem Intervall $[0, 2]$ für alle `n` $\in \{1, ..., 4\}$ und verschiedene Werte von `m`. Plotten Sie zu jedem `n` jeweils die Quadratur-Fehler bezüglich `m`. Verwenden Sie dabei eine doppelt logarithmische Darstellung, um die Konvergenzordnung abzulesen.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{\ln 2}{8}\pi$.

Aufgabe 2 (Gauß-Lobatto-Formeln, 4 TP)

Es sei $x_0 = \alpha$, $x_n = \beta$ und $n \geq 2$. Die Stützstellen $x_1, ..., x_{n-1}$ seien die Nullstellen eines Polynoms $p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$ mit der Eigenschaft

$$(p_{n-1}, q)_\omega = 0 \quad \forall q \in \mathcal{P}_{n-2}$$

für $w(x) = (x-\alpha)(\beta - x)$, und $\mu_k = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta L_k(x)\,dx$ seien die zugehörigen Gewichte. Zeigen Sie, dass dann die resultierende Quadraturformel die Exaktheitsbedingung

$$\int_\alpha^\beta p(x)\,dx = (\beta-\alpha)\sum_{k=0}^{n} \mu_k p(x_k) \quad \forall p \in \mathcal{P}_{2n-1}.$$

erfüllt.

Aufgabe 3 (Extrapolation der Trapezregel, 4 TP)

Zeigen Sie, dass die Extrapolation der summierten Trapezregel für die Gitterweiten $0 < h_n < ... < h_0$ für Polynome bis zum Grad $2n+1$ exakt ist.

Hinweis: Denken Sie an die asymptotische Fehlerentwicklung.