NUMERIK 1

Sommersemester 2016

— AUFGABENBLATT 9 —

Abgabetermin: Donnerstag, 30. Juni 2016, 12:00 Uhr

Hinweis: Aufgabe 3 ist freiwillig und bietet die Möglichkeit, zusätzliche Programmierpunkte zu sammeln.

Aufgabe 1 (Numerische Integration, 4 TP)

- Jedes Element T_{jk} im Extrapolationstableau der extrapolierten Trapezregel (siehe Seite 80 im Skript) lässt sich als Ergebnis einer Quadraturformel auffassen. Bestimmen Sie j, k so, dass T_{jk} bei Verwendung der Romberg-Folge gleich dem durch Anwendung der Simpsonregel erhaltenen Wert ist.
- Finden Sie Werte $a, b \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $f \in C[a, b]$, für die das Integral $\int_a^b f(x) dx$ besser durch die Trapezregel als durch die Simpsonregel approximiert wird.

Aufgabe 2 (Romberg-Quadratur, 4 PP)

- Implementieren Sie eine Romberg-Quadratur mittels extrapolierte Trapezregel zur Berechnung des Integrals

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1 + (\gamma x)^2} dx = \frac{2}{\gamma} \arctan(\gamma).$$

Wählen Sie dazu die Schrittweiten $h_0 = 1$ und $h_j = 2^{-j}h_0$, $j = 0, \dots, n$. Für die Werte $\gamma = 1$ und $\gamma = 500$ sowie $n = 0, \dots, 12$ bestimmen Sie jeweils mittels Extrapolation in h_j^2 und Auswertung bei 0 den Wert E_{h_n} der extrapolierten Trapezregel.

- Berechnen Sie zum Vergleich auch die einfache summierte Trapezregel T_{h_n} jeweils für die feinste Schrittweite h_n .
- Stellen Sie die Fehler von E_{h_n} und T_{h_n} in Abhängigkeit von n dar und interpretieren Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 3 (Multilevel-Quadratur, 8 Zusatz-PP)

- Implementieren ein Verfahren zur adaptiven Multilevel-Quadratur mit Hilfe der Trapez- bzw. Simpson-Regel. Genauer, schreiben Sie eine Funktion

```
y = multilevel_quad(f_handle, a, b, n, Nmax, tol),
```

wobei `f_handle` ein Funktionen-Handle der zu integrierenden Funktion, `a` bzw. `b` die untere bzw. obere Integrationsgrenze, `n` die Anzahl der zu Beginn gegebenen äquidistanten Intervalle, `Nmax` die maximal zulässige Anzahl an Intervallen und `tol` die für das Abbruchkriterium verwendete Toleranz beschreibt.

Nehmen Sie die Saturationsbedingung für die übergebene Funktion an. Berechnen Sie zum Gitter Δ_j im j -ten Schritt des Verfahrens für alle Teilintervalle $I_{k,j}$ lokale a posteriori Fehlerschätzungen $e_{I_{k,j}}(f)$ des Diskretisierungsfehlers in $I_{k,j}$ mit der Simpson-Regel.

Brechen Sie das Verfahren ab, sobald die Anzahl an Intervallen den Wert `Nmax` überschreitet oder der geschätzte globale Fehler $e_{\Delta_j}(f) = \sum_k e_{I_{k,j}}(f)$ die Genauigkeitsbedingung $|e_{\Delta_j}(f)| \leq \frac{1}{2} \text{tol}$ erfüllt. Andernfalls verfeinern Sie diejenigen Intervalle $I_{k,j}$ mit maximalem $|e_{I_{k,j}}(f)|$, indem Sie deren Mittelpunkte zu Δ_j hinzufügen um Δ_{j+1} zu erhalten.

b) Testen Sie Ihre Implementation anhand der Integrale

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx, \quad \int_0^\pi \sin(x) dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + (\gamma x)^2} dx = \frac{2}{\gamma} \arctan(\gamma)$$

mit $\gamma = 1, 10, 100, 500$. Wählen Sie $n = 10$, $N_{\max} = 1000$ und $\tau_{\text{ol}} = 10^{-10}$. Plotten Sie anschließend den exakten Fehler gegen die Anzahl der verwendeten Stützstellen unter Verwendung einer geeigneten logarithmischen Skalierung. Plotten Sie zum Vergleich jeweils auch den exakten Fehler der summierten Trapez-Regel mit uniformem Gitter und gleicher Anzahl an Quadraturpunkten. Was beobachten Sie?