NUMERIK 1

Sommersemester 2016

— AUFGABENBLATT 10 —

Abgabetermin: Donnerstag, 7. Juli 2016, 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (Autonomisierung, 4 TP)

Sei $y : [T_0, T_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = F(t, y(t)), \quad t \in (T_0, T_1], \quad y(T_0) = y_0. \quad (1)$$

Zeigen Sie, dass sich dieses nicht-autonome Anfangswertproblem autonomisieren lässt, indem Sie ein $x : [T_0, T_1] \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ sowie eine Funktion f und einen Startwert x_0 konstruieren, so dass folgendes gilt: x ist genau dann Lösung des autonomen Anfangswertproblems

$$x'(t) = f(x(t)), \quad t \in (T_0, T_1], \quad x(T_0) = x_0,$$

wenn y eine Lösung von (1) ist.

Aufgabe 2 (Kondition, 4 TP)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$mx''(t) = -Dx(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \quad x'(0) = v_0 \in \mathbb{R} \quad (2)$$

für $m, D > 0$.

- a) Formulieren Sie (2) als AWP erster Ordnung der Form $y'(t) = f(y(t))$, $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^2$.
- b) Zeigen Sie, dass die Funktion f Lipschitzstetig ist, und geben Sie mithilfe der Lipschitzkonstanten eine Abschätzung für die punktweise Kondition $\kappa(t)$ in der $\|\cdot\|_1$ -Norm an.

Hinweis: Es gilt $\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$.

- c) Berechnen Sie die zugehörige Wronski-Matrix $W(t)$ und damit eine Abschätzung für die punktweise Kondition $\kappa(t)$ in der $\|\cdot\|_1$ -Norm.

Hinweis: Die Lösung von (2) ist gegeben durch $x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$ mit $\omega^2 = \frac{D}{m}$.

b.w.

Aufgabe 3 (Taylorverfahren, 4 PP)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(x), \quad t \in [T_0, T_1], \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$$

mit $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$.

a) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm

$$[t, x] = \text{EulerEx}(f, \text{tspan}, x_0, N)$$

zur numerischen Lösung des Problems mittels des expliziten Eulerverfahrens, sowie ein MATLAB-Programm

$$[t, x] = \text{Taylor}(f, Df, \text{tspan}, x_0, N)$$

zur numerischen Lösung des Problems mittels des Taylor-Verfahrens 2. Ordnung, jeweils unter Wahl einer uniformen Schrittweite $\tau = (T_1 - T_0)/N$ und Eingabe von

f Funktionen-Handle für f ,
 Df Funktionen-Handle für die Ableitung Df ,
 tspan Vektor zur Bestimmung von $[T_0, T_1]$,
 x_0 Vektor für den Anfangswert x_0 ,
 N natürlichen Zahl für die Anzahl der Schritte N ,

und Ausgabe von

t Vektor der Stützstellen,
 x $d \times |t|$ -Matrix der approximierten Lösung an den Stützstellen.

b) Wenden Sie die Programme auf das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x, \quad t \in [0, 2\pi], \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

an und analysieren Sie die Ordnung der beiden Verfahren, indem Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung vergleichen und den Fehler in Abhängigkeit von τ graphisch darstellen.