

NUMERIK 1

Sommersemester 2016

— AUFGABENBLATT 11 —

Freiwillige Abgabe bis Donnerstag, 14. Juli 2016, 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (Konsistenz expliziter Einschrittverfahren, 4 Zusatz-TP)

Es sei ψ^τ ein explizites Einschrittverfahren zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d.$$

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- ψ^τ ist konsistent, d.h. für den Konsistenzfehler gilt $\varepsilon(x, \tau) = o(\tau)$.
- Es gilt $\psi^0 x = x$ und $\frac{d}{d\tau} \psi^\tau x|_{\tau=0} = f(x)$.
- Es gilt $\psi^\tau x = x + \tau h(x, \tau)$ für eine in τ stetige Funktion h mit $h(x, 0) = f(x)$.

Aufgabe 2 (Normerhaltung, 2 Zusatz-TP)

Betrachten Sie für $z(t) = (x(t), y(t))$ das Anfangswertproblem

$$z'(t) = \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{pmatrix}, \quad z(0) = z_0.$$

Zeigen Sie, ohne die Lösung des Problems zu berechnen, dass $\|z(t)\|_2 = \|z_0\|_2$ für alle Zeiten $t \geq 0$ gilt. Das bedeutet, die Lösung ist normerhaltend.

Aufgabe 3 (Runge-Kutta-Verfahren, 2 Zusatz-TT und 4 Zusatz-PP)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(x), \quad t \in (T_0, T_1], \quad x(0) = x_0$$

mit $f \in C(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Schreiben Sie ein MATLAB-Programm

$$[t, x, c] = \text{RungeKuttaEx}(f, \text{tspan}, x_0, N, b, A)$$

für ein explizites Runge-Kutta-Verfahren, welches durch b und A aus dem Butcher-Schema gegeben ist. Dabei ist die Eingabe gegeben durch

- f Funktionen-Handle für f ,
- tspan Vektor zur Bestimmung von $(T_0, T_1]$,
- x_0 Skalar für den Anfangswert x_0 ,
- N natürlichen Zahl für die Anzahl der Schritte N

bei Wahl einer uniformen Schrittweite $\tau = (T_1 - T_0)/N$, und die Ausgabe gegeben durch

- t Vektor der Stützstellen,
- x Vektor der approximierten Lösung an den Stützstellen,
- c Anzahl der durchgeführten Funktionsauswertungen.

Testen Sie ihr Programm mit dem Anfangswertproblem

$$x'(t) = \frac{\gamma}{1 + \tan^2(x(t))}, \quad t \in (0, 2], \quad x(0) = -\frac{\pi}{4},$$

indem Sie das explizite Euler-Verfahren, das Verfahren von Runge und Runge-Kutta-4-Verfahren wie folgt anwenden:

- Zeigen Sie, dass

$$x(t) = \arctan \left(\tan \left(\frac{-\pi}{4} \right) + \gamma t \right)$$

die exakte Lösung ist und plotten Sie diese im Vergleich zu den Lösungen der Verfahren für $\gamma = 100$ und $N = 2^4, \dots, 2^9$.

b.w.

b) Berechnen Sie für $\gamma = 1, 10, 100, 1000$ jeweils die Fehler

$$e(\tau) = \max_k |x(t_k) - x_k|$$

für $\tau = 2^{-3}, \dots, 2^{-8}$ (d.h. $N = 2^4, \dots, 2^9$) und plotten Sie diese in einer doppelt logarithmischen Skala für jedes Verfahren über der Anzahl der f -Auswertungen.

c) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.