NUMERIK 1

Sommersemester 2016

— AUFGABENBLATT 11 —

Aufgabe 1 (Konsistenz expliziter Einschrittverfahren, 4 Zusatz-TP)
Es sei ψ^τ ein explizites Einschrittverfahren zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d.$$

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) ψ^τ ist konsistent, d.h. für den Konsistenzfehler gilt $\varepsilon(x,\tau) = \mathrm{o}(\tau)$.

b) Es gilt $\psi^0 x = x$ und $\frac{d}{d\tau}\psi^\tau x|_{\tau=0} = f(x)$.

c) Es gilt $\psi^\tau x = x + \tau h(x,\tau)$ für eine in τ stetige Funktion h mit $h(x,0) = f(x)$.

Lösung: Der Konsistenzfehler ist definiert durch

$$\varepsilon(x,\tau) = \phi^\tau x - \psi^\tau x,$$

wobei $\phi^\tau x_0 = x(t)$ die exakte Lösung des AWP ist. Die jeweiligen Taylorentwicklungen der beiden Flussoperatoren bei $\tau = 0$ sind gegeben durch

$$\psi^\tau x = \psi^\tau x|_{\tau=0} + \tau \frac{d}{d\tau}\psi^\tau x|_{\tau=0} + \mathrm{o}(\tau)$$

bzw.

$$\phi^\tau x = \phi^\tau x|_{\tau=0} + \tau \frac{d}{d\tau}\phi^\tau x|_{\tau=0} + \mathrm{o}(\tau) = x + \tau f(x) + \mathrm{o}(\tau).$$

Ein Vergleich der Taylorentwicklungen liefert die Äquivalenz von a) und b).
Damit gilt

$$\frac{\psi^\tau x - x}{\tau} = f(x) + \mathrm{o}(1) =: h(x,\tau)$$

und die Äquivalenz von a) und c).

Aufgabe 2 (Normerhaltung, 2 Zusatz-TP)
Betrachten Sie für $z(t) = (x(t), y(t))$ das Anfangswertproblem

$$z'(t) = \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{pmatrix}, \quad z(0) = z_0.$$

Zeigen Sie, ohne die Lösung des Problems zu berechnen, dass $||z(t)||_2 = ||z_0||_2$ für alle Zeiten $t \geq 0$ gilt. Das bedeutet, die Lösung ist normerhaltend.

Lösung: Es ist $||z(t)||_2^2 = x(t)^2 + y(t)^2$ und somit

$$\frac{d}{dt}||z(t)||_2^2 = \frac{d}{dt}(x(t)^2 + y(t)^2) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = -2x(t)y(t) + 2y(t)x(t) = 0,$$

d.h. $||z(t)||_2^2 = c\ \forall t \geq 0$ für eine Konstante $c \geq 0$. Mit $z(0) = z_0$ folgt $||z(0)||_2^2 = ||z_0||_2^2$ und somit $c = ||z_0||_2$.