Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Christof Schütte, Rudolf Huttary

10. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

SS 2017

Abgabe: Montag 10.7.2017 (14:00)

1. Aufgabe (6 TP)
Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ zwei symmetrische Matrizen mit einer gemeinsamen Basis aus Eigenvektoren $\phi_1, ..., \phi_n$, d.h.

$$\begin{aligned} A\phi_i &= \lambda_i \phi_i \\ B\phi_i &= \mu_i \phi_i. \end{aligned} \qquad i = 1, ..., n$$

Zeigen Sie:

a) A und B sind gemeinsam diagonalisierbar, d.h. es existieren eine unitäre Matrix T und diagonale Matrizen D_A, D_B so dass

$$\begin{aligned} A &= TD_AT^T \\ B &= TD_BT^T. \end{aligned} \tag{1}$$

b) Es gilt:

$$e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}. \tag{2}$$

c) dass (2) nicht immer gilt, indem Sie zwei geeignete Matrizen als Gegenbeispiel angeben.

2. Aufgabe (4 TP + 4 PP)
Betrachten Sie das Anfangswertproblem $x : [0, T] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) \qquad \forall t \in (0, T), \qquad x(0) = x_0.$$

a) Überprüfen Sie ob und für welche Schrittweiten das explizite Euler–Verfahren für dieses AWP stabil ist, und geben Sie ggf. die Schrittweitenbeschränkung, die Stabilität garantiert, an.

b) Implementieren Sie das explizite Euler–Verfahren für das AWP mit $T = 2$ und $x_0 = (1, 2, 3)^T$. Testen Sie Ihr Programm für die Schrittweiten $\tau = 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$ und plotten Sie jeweils alle drei Lösungskomponenten über t. Was beobachten Sie?

3. Aufgabe (6 TP)

Geben Sie die diskrete Lösung an, die sich aus Anwendung des impliziten Euler mit Schrittweite τ auf das Anfangswertproblem $x' = Ax, x(0) = x_0$ mit symmetrischer Matrix A ergibt. Zeigen Sie, dass gilt:

$$x_k = TB^kT^Tx_0, \tag{3}$$

mit der Diagonalmatrix $B = (Id - \tau D)^{-1}$, wenn T und D die unitären und diagonalen Matrizen der Diagonalisierung von A sind.

Allgemeine Hinweise

Die Aufgaben sollten in Zweiergruppen gelöst und bei Ihrem Tutor abgegeben werden. Programmcode senden Sie bitte als **lauffähiges (!)** Matlab-Script per Email an Ihren Tutor. (`Tony Schwedek <tony.schwedek@fu-berlin.de>, Daniel Seeler <danielseeler@zedat.fu-berlin.de>`).