Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Christof Schütte, Rudolf Huttary

2. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

SS 2017

Abgabe: Montag 15.5.2017 (14:00)

1. Aufgabe (6 TP)
Es soll der Wert einer unbekannten Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $\tilde{x}$ approximiert werden. Bekannt sind für $\varepsilon > 0$ die Werte $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ und $f(1 + \epsilon) = 1$.
Berechnen Sie das Lagrangesche Interpolationspolynom p_L und das Newtonsche Interpolationspolynom p_N zu den Stützstellen $0, 1, 1 + \epsilon$, und bringen Sie die Polynome auf die Form

$$p_L(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad p_N(x) = b_d x^d + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse.

2. Aufgabe (4 TP)
Beweisen Sie, dass die *Newtonschen dividierten Differenzen* von der Reihenfolge der Stützstellen unabhängig sind. Genauer: Sei $\sigma \in \mathrm{S}_{n+1}$ eine Permutation der Zahlen $0, \ldots, n$, so gilt

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}].$$

3. Aufgabe (4 TP+ 6 PP + 2 Zusatz-PP)

a) Sei $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ mit $x_i \in \mathbb{R}$ ein Satz von $n + 1$ paarweise verschiedenen Stützstellen und $p_f \in \mathcal{P}^n$ das Interpolationspolynom von f mit Grad höchstens n und $p_f(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass die sogenannte Vandermonde-Matrix $A \in \mathbb{R}^{n+1 \times n+1}$ mit $A_{ij} = x_{i-1}^{j-1}$ invertierbar ist und

$$p_f(x) = \sum_{i=0}^{n} p_{i+1} x^i$$

mit $p = A^{-1} f(x_{i-1})_{i=1,\ldots,n+1}$ gilt.

b) Schreiben Sie ein `MATLAB`-Programm `p=monomialcoefficients(xi,f)`, das zu einer gegebenen Funktion `f` und einem Stützstellenvektor `xi` den Koeffizientenvektor `p` der Interpolierten bezüglich der Monombasis berechnet.
Schreiben Sie ferner ein `MATLAB`-Programm `y=monomialinterpolation(x,p)`, welches das Interpolationspolynom zum Koeffizientenvektor `p` an den Stellen `x` auswertet.

c) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} x^i$. Wie lautet der exakte Koeffizientenvektor? Testen Sie Ihr Programm indem Sie für diese Funktion und n uniform verteilte Stützstellen auf $[0, 1]$ mit $n = 1, \ldots, 200$ den Fehler der berechneten Koeffizientenvektoren in der Maximumsnorm über n plotten. Was beobachten Sie?

d) Untersuchen Sie die Kondition der Vandermonde-Matrix (Hinweis: `cond, condest`).

Allgemeine Hinweise

Die Aufgaben sollten in Zweiergruppen gelöst und bei Ihrem Tutor abgegeben werden. Programmcode senden Sie bitte als **lauffähiges (!)** Matlab-Script per Email an Ihren Tutor. (`Tony Schwedek <tony.schwedek@fu-berlin.de>, Daniel Seeler <danielseeler@zedat.fu-berlin.de>`).