Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Christof Schütte, Rudolf Huttary

4. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

SS 2017

Abgabe: Montag 29.5.2017 (14:00)

1. Aufgabe (9 PP)
Wir wollen versuchen, das Integral

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

numerisch zu approximieren. Dazu unterteilen wir das Intervall $[0,1]$ äquidistant in n Teilintervalle mit den Grenzen $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ und berechnen die sogenannte *Riemann-Summe*

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

mit $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Schreiben Sie ein `MATLAB` -Programm `riemann(I,f,n,q)`, das diese Riemann-Summe berechnet. Dabei bezeichnet der Vektor `I` das Integrationsintervall, `f` die Funktion, `n` die Anzahl der Teilintervalle und $0 \leq \mathtt{q} \leq 1$ einen Wert, der durch $\xi_k = x_{k-1} + \mathtt{q}(x_k - x_{k-1})$ die Lage des Wertes ξ_k festlegt.
Berechnen Sie nun für $n = 1, \ldots, 500$ den Fehler der Riemann-Summe, und plotten Sie diesen Fehler in geeigneter logarithmischer Skala gegen n. Werten Sie dazu einmal die Funktion an den Anfangspunkten der Teilintervalle aus (d.h. $\mathtt{q} = 0$), ein anderes Mal an deren Mittelpunkten (d.h. $\mathtt{q} = 0.5$). Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse. Was beobachten Sie?
Tipp: Für die Berechnung des Fehlers können Sie `0.5 * erf(1) * sqrt(pi)` als Vergleichswert heranziehen.

2. Aufgabe (3 TP)
Geben Sie die relative Kondition des Integrationsoperators $I : f \in C[a,b] \to I(f) \in \mathbb{R}$ an.

3. Aufgabe (8 TP)

a) Zeigen Sie, daß die Newton-Côtes-Formeln für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ symmetrisch sind, d.h. $\lambda_k = \lambda_{n-k}$ für alle $k = 0, \ldots, n$

b) Zeigen Sie, daß die Gewichte λ_k der Newton-Côtes-Formeln die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k = 1, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

erfüllen.

Allgemeine Hinweise

Die Aufgaben sollten in Zweiergruppen gelöst und bei Ihrem Tutor abgegeben werden. Programmcode senden Sie bitte als **lauffähiges (!)** Matlab-Script per Email an Ihren Tutor. (`Tony Schwedek <tony.schwedek@fu-berlin.de>`, `Daniel Seeler <danielseeler@zedat.fu-berlin.de>`).