Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Christof Schütte, Rudolf Huttary

9. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

SS 2017

Abgabe: Montag 3.7.2017 (14:00)

1. Aufgabe (8 TP)

a) Sei $A \in R^{m\times m}$ eine beliebige Matrix.

Zeigen Sie: Wenn $y : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ und $\tilde{y} : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ Lösungen der Differentialgleichung $\dot{y}(t) = Ay(t)$ sind, dann ist für beliebige Konstanten $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ auch $z(t) = ay(t) + b\tilde{y}(t)$ eine Lösung.

b) Sei nun $c > 0$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass dann

$$y(t) = \begin{pmatrix} \sin(ct) \\ \cos(ct) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \tilde{y}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(ct) \\ \sin(ct) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Lösungen der Differentialgleichung sind.

c) Bestimmen Sie für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems.

$$(AWP) \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{y}(t) & = & Ay(t) \;\text{ für } t > 0, \\ y(0) & = & \binom{\alpha}{\beta} \end{array} \right. \qquad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Nehmen Sie dabei an, dass die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig ist.

2. Aufgabe (7 TP)

Für $x : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$x'(t) = Ax(t) \qquad t \in (0,T], \qquad x(0) = x_0 \tag{3}$$

mit einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,m}$. Beweisen Sie für zwei Lösungen $x, \tilde{x}$ von (3) zu Anfangswerten $x_0, \tilde{x_0} \in \mathbb{R}^m$ und den größten Eigenwert λ_1 von A die Abschätzung

$$\max_{t\in[0,T]} |x(t) - \tilde{x}(t)|_2 \leq \max_{t\in[0,T]} e^{\lambda_1 t}|x_0 - \tilde{x}_0|_2.$$

3. Aufgabe (5 TP)
Weisen Sie nach, dass das Anfangswertproblem $x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad x(0) = x_0$ für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ und eine beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ die Lösung

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)ds \tag{4}$$

hat.

Allgemeine Hinweise

Die Aufgaben sollten in Zweiergruppen gelöst und bei Ihrem Tutor abgegeben werden. Programmcode senden Sie bitte als **lauffähiges (!)** Matlab-Script per Email an Ihren Tutor. (Tony Schwedek <tony.schwedek@fu-berlin.de>, Daniel Seeler <danielseeler@zedat.fu-berlin.de>).