Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Tobias Kies

1. Übung zur Vorlesung

Numerik I

SoSe 2017

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2017/NumerikI.php

Abgabe: Fr., 5. Mai 2017, 12:00 Uhr — Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.

1. Aufgabe *(Schrankensatz)* (4 TP)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene und konvexe Menge sowie $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Existiere weiter $c \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\sup_{x\in U} \|Df(x)\| \leq c$. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante c ist.

Hinweis: Mit $\|Df(x)\|$ ist die Matrix-Operatornorm von $Df(x)$ gemeint, die durch die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ induziert wird. Das heißt, es ist

$$\|Df(x)\| := \max_{y\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Df(x)y\|_2}{\|y\|_2}.$$

Darüber hinaus dürfen Sie ohne Beweis die Ungleichung

$$\left\| \int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t \right\|_2 \leq \int_a^b \|F(t)\|_2\,\mathrm{d}t$$

für integrierbare Abbildungen $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ verwenden.

2. Aufgabe (4 TP)

Sei die Abbildung $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit Fixpunkt $x^* \in \mathbb{R}$ und $|\phi'(x^*)| \neq 1$. Zeigen Sie, dass dann mindestens eine der Iterationsvorschriften

a) $x_{k+1} := \phi(x_k)$,

b) $x_{k+1} := \phi^{-1}(x_k)$

für Startwerte aus einer geeigneten offenen, nichtleeren Umgebung um x^* eine wohldefinierte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschreibt, die gegen x^* konvergiert.

3. Aufgabe (4 TP)
Beweisen Sie, dass die Gleichung $x + \ln x = 0$ genau eine Lösung z im Intervall $[0.5, 0.6]$ besitzt. Bestimmen Sie weiter, welche der folgenden Iterationsfolgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nach Banachschem Fixpunktsatz für Startwerte x_0 aus einer geeigneten offenen, nichtleeren Umgebung um z gegen z konvergieren:

a) $x_{k+1} = -\ln x_k$

b) $x_{k+1} = e^{-x_k}$

c) $x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + e^{-x_k})$

4. Aufgabe (4 TP)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit und $b \in \mathbb{R}^n$. Weiter bezeichne $\lambda_{\max}(A) \in \mathbb{R}$ den größten Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass für alle $\alpha \in \left(0, \frac{2}{\lambda_{\max}(A)}\right)$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ die durch

$$x_{k+1} := x_k + \alpha(b - Ax_k)$$

definierte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen die eindeutige Lösung von $Ax = b$ konvergiert.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für jede symmetrische Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$\lambda_{\min}(M) = \min_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\langle Mx, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \leq \max_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\langle Mx, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \lambda_{\max}(M).$$

5. Bonusaufgabe (4 TP)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $k \in C^0([a, b] \times [a, b])$ und $g \in C^0([a, b])$. Gesucht ist eine Lösung x der Gleichung

$$x(s) - \int_a^b k(s, t)\, x(t)\, \mathrm{d}t = g(s) \qquad \forall s \in [a, b].$$

Schreiben Sie diese Gleichung als geeignetes Fixpunktproblem und beweisen Sie, dass für

$$\max_{s\in[a,b]} \int_a^b |k(s, t)|\, \mathrm{d}t < 1$$

eine eindeutige Lösung in $C^0([a, b])$ existiert.