Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Tobias Kies

2. Übung zur Vorlesung

Numerik I

SoSe 2017

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2017/NumerikI.php

Abgabe: Fr., 12. Mai 2017, 12:00 Uhr Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.

1. Aufgabe (8 TP)
Sei $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $\phi \in C^p(\mathbb{R})$ mit Fixpunkt $x^* \in \mathbb{R}$ gegeben, sodass $\phi^{(i)}(x^*) = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, p-1\}$ gilt.

a) Zeigen sie, dass die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \phi(x_k)$$

für alle x_0 aus einer Umgebung von x^* konvergiert.

b) Beweisen Sie weiter, dass das Verfahren in dieser Umgebung mindestens mit Ordnung p gegen x^* konvergiert und

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x^* - x_{k+1}|}{|x^* - x_k|^p} = \frac{1}{p!}|\phi^{(p)}(x^*)|$$

gilt, sofern $x_k \neq x^*$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

c) Sei nun $f = (y - y^*)h(y)$ mit $h \in C^2(\mathbb{R})$ und $h(y^*) \neq 0$. Folgern Sie, dass das *Steffensonverfahren*

$$y_{k+1} = \phi(y_k) = \begin{cases} y_k - \frac{f(y_k)^2}{f(y_k) - f(y_k - f(y_k))} & \text{für } f(y_k) \neq 0, \\ y_k & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle y_0 aus einer Umgebung um y^* mindestens quadratisch konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ erfüllt ist.

2. Aufgabe (4 TP)
Sei $J\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \lambda_{\max}(D^2J(x)) \leq c \in \mathbb{R}, \qquad \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \lambda_{\min}(D^2J(x)) > 0.$$

Zeigen sie, dass die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die durch

$$x_{k+1} := x_k - \alpha\nabla J(x_k)$$

definiert wird, für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in (0, \frac{2}{c})$ gegen das eindeutige Minimum des Funktionals J auf $\mathbb{R}^n$ konvergiert.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass J strikt konvex ist.

3. Aufgabe (2 TP + 2 PP)
Gegeben sei die nichtlineare Funktion

$$F \ : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (F_1(x,y), F_2(x,y))$$

mit

$$\begin{aligned} F_1(x,y) &= x^2 - 3xy \\ F_2(x,y) &= 5xy \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $F'(x,y)$.

b) Programmieren Sie in Matlab das Newton-Verfahren für das System

$$F(x,y) = 0 \quad .$$

c) Testen Sie Ihr Programm mit dem Startwert

$$(x_0, y_0) = (3, 4)$$

und plotten Sie eine Tabelle der Iterationschritte mit zugehörigen Funktionswerten. Interpretieren Sie die Tabelle hinsichtlich der Konvergenzrate.

d) Geben sie vier Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ an, bei denen das Newton-Verfahren für das System $F(x,y) = 0$ nicht durchführbar ist oder divergiert.

4. Bonusaufgabe (4 TP)
Sei p ein reelles Polynom n-ten Grades mit n Nullstellen $\xi_i \in \mathbb{R}$, $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \cdots \leq \xi_n$. Zeigen sie, dass für $x_0 > \xi_n$ die Newton-Iteration

$$x_{k+1} = x_k - \frac{p(x_k)}{p'(x_k)}$$

eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definiert, die monoton fallend ist und gegen ξ_n konvergiert.

Hinweis: Beweisen Sie, dass p und p' in einem geeigneten Intervall konvex (oder konkav) sind.