Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Tobias Kies

3. Übung zur Vorlesung

Numerik I

SoSe 2017

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2017/NumerikI.php

Abgabe: Fr., 19. Mai 2017, 12:00 Uhr Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.

1. Aufgabe (4 TP)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und definiere für alle $u, v \in C([a, b])$

$$\langle u, v\rangle_{L^2([a,b])} := \int_a^b u(x)\, v(x)\,\mathrm{d}x.$$

a) Beweisen Sie, dass $(C([a, b]), \langle\cdot, \cdot\rangle_{L^2([a,b])})$ ein Prähilbertraum ist.

b) Zeigen Sie, dass $(C([a, b]), \langle\cdot, \cdot\rangle_{L^2([a,b])})$ kein Hilbertraum ist.

2. Aufgabe (4 TP)

a) Zeigen Sie: Jeder Prähilbertraum ist strikt konvex.

b) Geben Sie ein Beispiel für einen strikt konvexen Raum an, der kein Prähilbertraum ist.

3. Aufgabe (4 TP + 3 Bonus TP)
Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum.

a) Zeigen Sie, dass $(V, \|\cdot\|)$ genau dann strikt konvex ist, falls für alle $t \in (0, 1)$ und für alle $u, v \in V \setminus \{0\}$ mit $\|u\| = \|v\|$ und $u \neq v$ gilt, dass

$$\|tu + (1 - t)v\| < t\|u\| + (1 - t)\|v\|.$$

b) **(Bonus)** Zeigen oder widerlegen Sie, dass $(V, \|\cdot\|)$ genau dann strikt konvex ist, falls für alle $t \in (0, 1)$ und für alle $u, v \in V \setminus \{0\}$ gilt, dass

$$\forall \lambda \in (0, \infty)\colon u \neq \lambda v \implies \|tu + (1 - t)v\| < t\|u\| + (1 - t)\|v\|.$$

4. Aufgabe (4 TP + 1 Bonus TP)
Sei (X, p) ein normierter Vektorraum.

a) Zeigen Sie, dass die Normabbildung $p\colon X \to [0, \infty)$ konvex ist.

b) Beweisen Sie, dass die Einheitskugel bezüglich p, definiert durch

$$B(p) := \{x \in X \mid p(x) \leq 1\},$$

konvex ist.

c) Sei nun $q\colon X \to [0, \infty)$ eine Abbildung, sodass für alle $x \in X$

$$q(x) = 0 \iff x = 0$$

und für alle $x \in X$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$q(\lambda x) = |\lambda| p(x).$$

Beweisen Sie, dass q genau dann eine Norm ist, wenn die Kugel $B(q)$ konvex ist.

d) **(Bonus)** Zeigen oder widerlegen Sie, dass p genau dann strikt konvex ist, wenn (X, p) strikt konvex ist.