Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Tobias Kies

4. Übung zur Vorlesung

Numerik I

SoSe 2017

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2017/NumerikI.php`

Abgabe: Fr., 26. Mai 2017, 12:00 Uhr Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.

1. Aufgabe (4 TP)
Gegeben sei der normierte Vektorraum $V = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, der Unterraum $U = \{u = (u_1, u_2) \in V : u_1 - u_2 = 0\}$ sowie $f = (2, 4) \in V$.

a) Formulieren Sie die entsprechende Bestapproximationsaufgabe. Ist sie lösbar? Ist eine etwaige Lösung eindeutig?

b) Geben Sie die zur Bestapproximationsaufgabe äquivalente Normalengleichung an.

c) Laut Skript läßt sich die Bestapproximationsaufgabe $p \in U$ über eine orthogonale Projektion P charakterisieren. Wie lautet der Zusammenhang? Geben Sie die Projektion P explizit an und berechnen Sie damit die Bestapproximation $p \in U$ an $f = (2, 4)$.

2. Aufgabe (4 TP)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie, dass X genau dann ein Prähilbertraum ist, wenn für alle $x, y \in X$ die *Parallelogrammidentität*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

erfüllt ist.

3. Aufgabe (4 TP)
Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \leq n$ und $\operatorname{rang}(A) = m$. Weiter sei $P \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die orthogonale Projektion auf den Kern von A bezüglich des euklidischen Skalarprodukts. Zeigen Sie:

a) Die Abbildung P ist gegeben durch

$$P = I - A^T(AA^T)^{-1}A.$$

b) Die Abbildung $Q = I - P$ ist die Orthogonalprojektion auf das Bild von A^T.

4. Aufgabe (4 TP)
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Menge sowie $x \in \mathbb{R}^n$.

a) Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Lösung des Problems

$$\min_{z \in U} \|z - x\|_2^2 \tag{1}$$

gibt.

b) Beweisen Sie, dass $\overline{x} \in U$ genau dann (1) löst, wenn

$$\forall z \in U\colon\ \langle \overline{x} - x, z - \overline{x} \rangle \geq 0$$

gilt.

Hinweis: Orientieren Sie sich an dem Beweis für den Fall, dass U ein Unterraum ist.

5. Bonusaufgabe (2 TP)
Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prähilbertraum und $P\colon V \to U := R(P)$ eine Orthogonalprojektion. Beweisen Sie für alle $f \in V$, dass Pf die Bestapproximation von f auf U bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist.

6. Bonusaufgabe (4 TP)
Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter, linearer Raum über $\mathbb{R}$. Beweisen Sie oder finden Sie ein Gegenbeispiel dazu, dass für jeden linearen Unterraum $U \subseteq V$ und zu jedem $f \in V$ eine Lösung der Bestapproximationsaufgabe

$$u \in U: \qquad \|u - f\| \leq \|v - f\| \quad \forall v \in U$$

existiert.