Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Tobias Kies

5. Übung zur Vorlesung

Numerik I

SoSe 2017

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2017/NumerikI.php`

Abgabe: Fr., 02. Juni 2017, 12:00 Uhr ALLGEMEINE HINWEISE

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.

1. Aufgabe (8 TP)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Orthogonalmatrix und $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix mit $|D_{ii}| = 1$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$.

a) Zeigen Sie, dass $l \in \mathbb{N}$ und Householder–Reflexions–Matrizen Q_i für $i \in \{1,\dots,l\}$ existieren, sodass

$$D = Q_1 \cdots Q_l.$$

b) Zeigen Sie, dass $l \in \mathbb{N}$ und Givens–Rotations–Matrizen Q_i für $i \in \{1,\dots,l\}$ existieren, sodass

$$D = Q_1 \cdots Q_l \qquad \text{oder} \qquad D = Q_1 \cdots Q_l \cdot \hat{E}$$

gilt, wobei $\hat{E} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$\hat{E}_{ij} := \begin{cases} -1 & \text{für } i = j = 1 \\ 1 & \text{für } i \neq 1,\ i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

c) Zeigen Sie, dass $l \in \mathbb{N}$ und Householder–Reflexions–Matrizen Q_i für $i \in \{1,\dots,l\}$ existieren, sodass

$$A = Q_l \cdots Q_1.$$

d) Zeigen Sie, dass $l \in \mathbb{N}$ und Givens–Rotations–Matrizen Q_i für $i \in \{1,\dots,l\}$ existieren, sodass

$$A = Q_l \cdots Q_1 \qquad \text{oder} \qquad A = Q_l \cdots Q_1 \cdot \hat{E}.$$

e) Erklären Sie in Worten wieso es in $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 2$ stets möglich ist, die Menge aller Orthogonalbasen des $\mathbb{R}^n$ in zwei disjunkte Mengen aufzuteilen, nämlich in die der “linksgedrehten” und die der “rechtsgedrehten” Koordinatensysteme.

2. Aufgabe (8 PP)

a) Implementieren Sie in MATLAB eine Funktion mit der Signatur

`[Q,R] = qr_householder(A)`,

die zu einer beliebigen matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine QR–Zerlegung $A = Q_H R_H$ mittels Householder–Reflexionen berechnet.

b) Implementieren Sie weiterhin eine Funktion mit der Signatur

`[Q,R] = qr_givens(A)`,

die zu einer beliebigen matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine QR–Zerlegung $A = Q_G R_G$ mittels Givens–Rotationen berechnet.

c) Setzen Sie `A = magic(3)`. Testen Sie Ihre Implementation auf Richtigkeit, indem Sie die Funktionen `qr_householder` und `qr_givens` auf die Matrizen `A`, `A(:,1:2)` und `A(1:2,:)` anwenden und die Matrixprodukte $Q \cdot R$ mit den Eingabematrizen vergleichen.

d) Berechnen Sie für $n \in \{10, 20, \ldots, 100\}$ jeweils die beiden QR–Zerlegungen sowie die LR–Zerlegung für die Hilbert–Matrix H, in MATLAB aufrufbar mittels `hilb(n)`, und für die Matrix $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$, gegeben durch

$$W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ -1 & \text{für } j < i \\ 1 & \text{für } j = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wählen Sie für beide Matrizen ($A = H$ und $A = W$) zudem $x_0 := (1, \ldots, n)^T$ sowie $b := Ax_0$ und lösen Sie das resultierende Gleichungssystem mit mit Hilfe der verschiedenen Matrix–Zerlegungen, wodurch Sie Lösungen x_H, x_G und x_{LR} erhalten. Geben Sie für die Zerlegungen der Hilbert–Matrix und der Matrix W jeweils die Werte von

$$n,\ \text{cond}(A),\ \text{cond}(R_H),\ \text{cond}(R_G),\ \text{cond}(L_{\text{LR}}),\ \text{cond}(R_{\text{LR}}),\ \text{err}(x_G),\ \text{err}(x_H),\ \text{err}(x_{\text{LR}})$$

aus. Hierbei ist $\text{err}(x) = \frac{\|x - x_0\|_2}{\|x_0\|_2}$ der relative Fehler bezüglich der euklidischen Norm. Was beobachten Sie? Wie erklären Sie sich die Ergebnisse?

Hinweis: Sie können in MATLAB Warnungen mit Hilfe des Befehls `warning('off', 'all')` unterdrücken. Sie dürfen außerdem die MATLAB–eigene Funktion `lu` benutzen, um die LR-Zerlegungen (mit Pivotisierung) zu berechnen.

Wichtig: Stellen Sie sicher, dass Sie Ihre Routinen effizient implementieren. Das bedeutet, dass Sie beispielsweise keine Operationen auf Matrix–Einträge vornehmen, die dadurch generell nicht verändert werden, und dass Sie keine Matrix–Matrix–Multiplikationen durchführen, wenn die zugehörige Operation auch effizienter durch Matrix–Vektor–Multiplikation realisiert werden könnte.

3. Bonusaufgabe (4 TP)
Habe $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \leq n$ vollen Rang und sei eine QR-Zerlegung $A^T = QR$ mit $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $R \in \mathbb{R}^{n\times m}$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{range}\left((AQ)^T\right) = \mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}$$

und

$$\ker(AQ) = \{0\}^m \times \mathbb{R}^{n-m}.$$

Folgern Sie, dass die Abbildung

$$\{0\}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow \ker(A)\,, \qquad x \longmapsto Qx$$

wohldefiniert und ein Isomorphismus ist.