Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Tobias Kies

6. Übung zur Vorlesung

Numerik I

SoSe 2017

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2017/NumerikI.php

Abgabe: Fr., 09. Juni 2017, 12:00 Uhr Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.

1. Aufgabe (4 TP)
Berechnen Sie die Lösungen zu den folgenden Hermite–Interpolationsaufgaben über dem Intervall $[-1, 1]$.

a) $p(-1) = 1, \quad p'(-1) = 0, \quad p(1) = 0, \quad p'(1) = 0.$

b) $p(-1) = 0, \quad p'(-1) = 1, \quad p(1) = 0, \quad p'(1) = 0.$

c) $p(-1) = 0, \quad p'(-1) = 0, \quad p(1) = 1, \quad p'(1) = 0.$

d) $p(-1) = 0, \quad p'(-1) = 0, \quad p(1) = 0, \quad p'(1) = 1.$

Stellen Sie Ihre Lösungen bezüglich der kanonischen Polynombasis $\{x^0, x^1, x^2, \dots\}$ dar und geben Sie nur jeweils diejenige Lösung mit minimalem Polynomgrad an.

2. Aufgabe (4 TP)
Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ und $c_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{0, \dots, n\}$. Zeigen Sie, dass das Hermite–Interpolationsproblem auf $[-1, 1]$

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}: \qquad p^{(i)}(-1) = c_i, \quad p^{(i)}(1) = (-1)^i c_i$$

eine eindeutige Lösung in $U := \operatorname{span}_{i \in \{0,\dots,n\}}\{x^{2i}\}$ besitzt.

3. Aufgabe (4 TP)
Zeigen Sie für nicht notwendigerweise paarweise verschiedene Knoten $x_0, \dots x_n$, dass die dividierte Differenz $f[x_0, \dots, x_n]$ unabhängig von der Reihenfolge der Knoten ist, d. h.

$$f[x_0, \dots, x_n] = f[x_{i_0}, \dots, x_{i_n}]$$

gilt für jede Permutation $i_0, \dots, i_n$ der Indizes $(0, \dots, n)$.

4. Aufgabe (4 TP)
Sei $a = x_0 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ eine Knotenverteilung im Intervall $I = [a, b]$. Für eine stetige Funktion $g \in C(I)$ ist der *interpolierende Linienzug* $\mathcal{I}g \in C(I)$ definiert durch:

- Es ist $\mathcal{I}g(x_i) = g(x_i)$ für $i = 0, \ldots, n$,
- und $\mathcal{I}g\big|_{[x_i, x_{i+1}]}$ ist Polynom ersten Grades (oder weniger) für $i = 0, \ldots, n-1$.

Zeigen Sie:

a) Für jede Funktion $g \in C^2(I)$ gilt

$$\|g - \mathcal{I}g\|_\infty \leq \frac{h^2}{8}\|g''\|_\infty \ ,$$

wobei $h = \max\limits_{0 \leq i \leq n-1}(x_{i+1} - x_i)$ der „Gitterweitenparameter" ist.

b) Für die absolute Kondition der Linienzuginterpolation gilt $\kappa_{\text{abs}} = 1$.

5. Bonusaufgabe (4 TP)
Sei $a = x_0 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ eine Knotenverteilung im Intervall $[a, b]$. Zeigen Sie, dass der Interpolationsoperator

$$\varphi \colon C[a, b] \longrightarrow \mathcal{P}_n, \qquad f \longmapsto p_n$$

eine Projektion ist und die Norm $\|\varphi\|_\infty = \Lambda_n$ hat, wobei

$$\Lambda_n = \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$$

die Lebesque-Konstante ist und L_k die Lagrange-Polynome bezeichnet.