Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Tobias Kies

8. Übung zur Vorlesung

Numerik I

SoSe 2017

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2017/NumerikI.php

Abgabe: Fr., 23. Juni 2017, 12:00 Uhr Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.

1. Aufgabe (8 TP)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei ein Gitter $a = x_0^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} = b$ mit Gitterweite $h_n = \max_{k=1,\ldots,n} |x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}|$ gegeben. Für $f \in C^0([a,b])$ und $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $I_n f \in C^0([a,b])$ die stückweise lineare Interpolation von f auf dem Gitter $\left(x_k^{(n)}\right)_{k=0,\ldots,n}$, d. h. diejenige Funktion mit

$$\begin{aligned} I_n f(x_k^n) &= f(x_k^n) && \text{für alle } k \in \{0,\ldots,n\}, \\ I_n f|_{[x_{k-1}^n, x_k^n]} &\in \mathcal{P}_1 && \text{für alle } k \in \{1,\ldots,n\}. \end{aligned}$$

a) Beweisen Sie für $f \in C^1([a,b])$ die Abschätzung

$$\|f - I_n f\|_\infty \le h_n \|f'\|_\infty.$$

b) Zeigen Sie für $f \in C^{0,\alpha}([a,b])$, $\alpha \in (0,1]$ und eine von f, h und n unabhängige Konstante c die Abschätzung

$$\|f - I_n f\|_\infty \le c\, h_n^\alpha \|f\|_{C^{0,\alpha}([a,b])}.$$

c) Sei nun $f \in C^0([a,b])$ und gelte $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. Zeigen Sie die Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \|f - I_n f\|_\infty = 0.$$

d) Finden Sie ein Beispiel für ein $f \in C^\infty([a,b])$, sodass für alle $\varepsilon > 0$ und $c > 0$ unter der Bedingung $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \ge N \implies \|f - I_n f\|_\infty \ge c\, h_n^{2+\varepsilon}.$$

Hinweis: Der Hölder–Raum $C^{0,\alpha}([a,b])$ ist für $\alpha \in (0,1]$ definiert durch

$$C^{0,\alpha}([a,b]) := \left\{ f \in C^0([a,b]) \mid \|f\|_{C^{0,\alpha}([a,b])} < \infty \right\},$$
$$\|f\|_{C^{0,\alpha}([a,b])} := \sup_{x,y \in [a,b]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Es gilt $f \in C^{0,\alpha}([a,b])$ genau dann, wenn f Hölder–stetig mit Exponent α ist, und $\|f\|_{C^{0,\alpha}([a,b])}$ bezeichnet den minimalen Hölder–Koeffizienten.

2. Aufgabe (8 PP)
Gegeben seien die Funktionen

$$f_1\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f_2\colon [-5,5] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f_3\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sin(x) \qquad x \longmapsto \frac{1}{1+x^2} \qquad x \longmapsto \sqrt{x}$$

Berechnen Sie für jede dieser Funktionen und für alle $n \in \{5, 10, 20, 30, 40, 50\} =: N$ die

- Polynominterpolation $p_n^1 f_i$ mit äquidistantem Gitter,
- Polynominterpolation $p_n^2 f_i$ mit Tschebyscheff–Knoten,
- Hermite-Interpolation $p_n^3 f_i$ mit $x_0 = \ldots = x_n = \frac{a_i+b_i}{2}$ und die
- stückweise lineare Spline-Interpolation $p_n^4 f_i$ mit äquidistantem Gitter.

Plotten Sie anschließend für alle $(i,j,n) \in \{1,2,3\} \times \{1,2,3,4\} \times N$ den approximierten Fehler $|||f_i - p_n^j f_i|||_{[a_i,b_i]}$ in einer geeigneten logarithmischen Skalierung. Dabei ist die Approximation $|||\cdot|||_{[a,b]}$ der ∞–Norm auf $C([a,b])$ gegeben durch

$$|||g|||_{[a,b]} := \max_{k \in \{0,\ldots,1000\}} \left| g\left(a + k\tfrac{b-a}{1000}\right) \right|$$

Welche Konvergenzverhalten beobachten Sie? Decken sich die Ergebnisse mit Ihren Erwartungen aus der Vorlesung und den Übungen?

Hinweis: Für f_2 dürfen Sie die Hermite–Interpolation auslassen. Falls Sie neugierig auf die Ergebnisse für $p_n^3 f_2$ sind, können Sie beispielsweise $N' := \{3, 5, 8, 10, 13, 15\}$ wählen und versuchen, die benötigten höheren Ableitungen von f_2 in `MATLAB` symbolisch zu berechnen.

3. Bonusaufgabe *(Interpolation in 2D)* (4 TP)
Sei $I = \{(i,j) \in \{0,\ldots,3\}^2 \mid j \leq i\}$. Weiter sei für alle $(i,j) \in I$

$$z_{ij} := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie, dass für alle $f \in \mathbb{R}^I$ genau ein $p \in \mathcal{P}_3 = \operatorname{span}\{x^i y^j \mid i,j \in \{0,\ldots,3\},\ i+j \leq 3\}$ existiert mit

$$\forall k \in I\colon\ p(z_k) = f_k.$$