Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Tobias Kies

9. Übung zur Vorlesung

Numerik I

SoSe 2017

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2017/NumerikI.php`

Abgabe: Fr., 30. Juni 2017, 12:00 Uhr

Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.

1. Aufgabe (8 PP)

a) Implementieren Sie eine Funktion `taylor_coeff = spline_coeff(x,f)` zur Berechnung der Taylor–Koeffizienten `taylor_coeff` der kubischen Spline–Interpolierenden, die durch den Stützstellenvektor `x` und den Vektor von Funktionswerten und Randwerten `f` beschrieben wird.

b) Schreiben Sie eine Funktion `y = spline_eval(x,taylor_coeff,t)`. Hier sind die Variablen `x` und `taylor_coeff` wie oben und `t` ist ein Vektor von Stellen, an denen die durch `taylor_coeff` und `x` beschriebene Spline–Interpolierende ausgewertet werden soll. Geben Sie das Ergebnis der Auswertungen im Vektor `y` zurück.

c) Testen Sie Ihre Implementation, indem Sie die Spline–Interpolierenden der Funktionen

$$f_1\colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sin(x) \qquad\qquad f_2\colon [-5, 5] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{1+x^2},$$

mit 10 äquidistanten Stützstellen berechnen und deren Funktionsgraphen plotten.

d) Plotten Sie anschließend für alle $n \in \{5, 10, 20, 30, 40, 50\}$ (als Anzahl der Stützstellen) die approximierten Fehler $|||f_i - I_n f_i|||_{[a_i,b_i]}$ in einer geeigneten logarithmischen Skalierung gegen n. Dabei ist die Approximation $|||\cdot|||_{[a,b]}$ der ∞−Norm auf $C([a, b])$ gegeben durch

$$|||g|||_{[a,b]} := \max_{k=0,\dots,1000} \left| g\left(a + k\tfrac{b-a}{1000}\right)\right|.$$

Was beobachten Sie? Wie verhalten sich die Ergebnisse im Vergleich zu anderen Verfahren zur Interpolation?

2. Aufgabe (4 TP)

a) Zeigen Sie, dass die Approximation

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx$$

der Trapezregel

$$(b-a)\left(\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2}\right)$$

entspricht. In der Formel ist $p_2(x)$ das Interpolationspolynom erster Ordnung zu den Stützstellen $x_0 = a$ und $x_1 = b$.

b) Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_3(x)dx$$

der Simpsonregel

$$(b-a)\left(\frac{f(a)}{6} + \frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f(b)}{6}\right)$$

entspricht. Hier ist $p_3(x)$ das quadratische Interpolationspolynom zu den Stützstellen $x_0 = a$, $x_1 = \frac{1}{2}(a+b)$ und $x_2 = b$.

3. Aufgabe (4 TP)
Sei das Dreieck T_0 mit den Eckpunkten $(0,0), (1,0)$ und $(0,1)$ gegeben und sei $|T_0| = \frac{1}{2}$ der Flächeninhalt von T_0.

a) Kann man einen Knoten p_0 finden, sodass die Quadraturformel

$$|T_0|\, f(p_0) \approx \int_{T_0} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Polynome ersten Grades exakt integriert?

b) Kann man drei Knoten p_0, p_1, p_2 finden, sodass die Quadraturformel

$$\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2} |T_0|\, f(p_i) \approx \int_{T_0} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Polynome zweiten Grades exakt integriert?

4. Bonusaufgabe (4 PP)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f \in C([a, b])$. Im Folgenden Untersuchen wir die Approximation von $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ durch Riemannsche Summen der Art $\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)f(\hat{x}_i)$ mit $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ und $\hat{x}_i \in [x_i, x_{i+1}]$ für $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

a) Schreiben Sie eine MATLAB–Funktion

```
quad_f = riemann_sum( f, H, X )
```

die das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ mittels der Riemannschen Summe approximiert, die durch H und X definiert wird. Hierbei ist $H = (h_i)_{i=1,\ldots,n}$ der Vektor der Intervallängen $h_i = x_i - x_{i-1}$ und X ist der Vektor der Stützstellen $\hat{x}_i$.

b) Im Folgenden betrachten wir uniforme Gitter $(x_0, \ldots, x_n)$, also $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Für $\lambda \in [0, 1]$ definieren wir nun die Riemannsche Summe mit uniformen Stützstellen bezüglich λ und n durch

$$\hat{x}_i = x_i + \lambda\frac{b-a}{n}$$

sowie die Riemannsche Summe mit alternierenden Stützstellen durch

$$\hat{x}_i = \begin{cases} x_i + \lambda\frac{b-a}{n} & \text{für } i \text{ gerade,} \\ x_i + (1-\lambda)\frac{b-a}{n} & \text{für } i \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Wählen Sie $f(x) = \sin(x)$ und untersuchen Sie die Quadraturfehler, die sich jeweils aus der Approximation durch Riemannsche Summen mit uniformen und alternierenden Stützstellen ergeben, indem Sie geeignete Werte für λ und n wählen. Welche Konvergenzverhalten erwarten Sie für verschiedene λ und was können Sie beobachten? Wie lassen sich Ihre Ergebnisse erklären?