Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Tobias Kies

10. Übung zur Vorlesung

Numerik I

SoSe 2017

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2017/NumerikI.php

Abgabe: Fr., 07. Juli 2017, 12:00 Uhr Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.

1. Aufgabe (8 TP)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}$ sowie $h := \frac{b-a}{n}$. Zu $f \in C([a,b])$ bezeichne

$$Q(f) := h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right)$$

die summierte Trapezregel.
Im Folgenden sei angenommen, dass $f \in C^4([a,b])$ gilt.

a) Leiten Sie eine Fehlerformel der Art

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - Q(f) = \frac{h^2}{12}f'(a) - \frac{h^2}{12}f'(b) + \mathcal{O}(h^4)$$

her.

Hinweis: Hermite–Interpolation.

b) Zeigen Sie, dass die summierte Trapezregel bezüglich h von Ordnung 4 ist, falls $f \in C^4(\mathbb{R})$ gilt und periodisch auf $[a,b]$ ist, sprich $f(x) = f(x + k(b-a))$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$.

c) Beweisen Sie (nun auch für nicht–periodische f), dass die modifizierten Trapezregeln

$$M_1(f) := Q(f) + \frac{h^2}{12}\big(f'(a) - f'(b)\big)$$
$$M_2(f) := Q(f) + \frac{1}{12}\big(f(a+h^2) + f(b-h^2) - f(a) - f(b)\big)$$

von Ordnung 4 sind, und dass die Regel

$$M_3(f) := Q(f) + \frac{h}{12}\left(f(a+h) + f(b-h) - f(a) - f(b)\right)$$

von Ordnung 3 ist.

d) Was sind Gründe, die dagegen sprechen, die Regel M_2 zu verwenden?

2. Aufgabe (8 PP)

a) Implementieren Sie ein Verfahren zur summierten Gauß–Quadratur, indem Sie eine Funktion `y = gauss_quad( f_handle, a, b, n, m )` schreiben, der ein Funktionen–Handle `f_handle`, Intervallgrenzen `a`, `b`, der zu verwendende Polynomgrad `n` (mit $n \in \{1, \ldots, 4\}$) und die Anzahl der Teilintervalle `m` übergeben werden. Geben Sie in `y` das Ergebnis der Quadratur zurück. Testen Sie Ihr Verfahren anhand geeigneter Monome x^i auf dem Intervall $[0, 1]$ auf Richtigkeit.

   Hinweis: Sie müssen die Gewichte und Stützstellen nicht selbst berechnen, sondern dürfen Werte aus der Literatur verwenden.

b) Implementieren Sie ein Verfahren zur summierten Newton-Cotes-Quadratur, indem Sie eine Funktion `y = newton_cotes_quad( f_handle, a, b, n, m )` schreiben, der ein Funktionen-Handle `f_handle`, Intervallgrenzen `a`, `b`, der zu verwendende Polynomgrad `n` (mit $n \in \{1, \ldots, 6\}$) und die Anzahl der Teilintervalle `m` übergeben werden. Geben Sie in `y` das Ergebnis der Quadratur zurück. Testen Sie Ihr Verfahren anhand geeigneter Monome x^i auf dem Intervall $[0, 1]$ auf Richtigkeit.

c) Testen Sie Ihre Implementationen an den Funktionen

   – $f_1(x) = \frac{2\ln(\frac{x}{2}+1)}{x^2+4}$ auf dem Intervall $[0, 2]$,

   – $f_2(x) = x^3 - x + \cos(\pi x)$ auf $[-1, 1]$ und

   – $f_3(x) = \frac{2-\sqrt{2}}{\pi}x^2 + sin(x)$ auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{4}]$.

   für alle $n \in \{1, \ldots, 4\}$ bzw. für alle $n \in \{1, \ldots, 6\}$ und für verschiedene Werte von m. Plotten sie zu jedem `n` jeweils die Quadratur–Fehler bezüglich `m`. Sie dürfen ohne Beweis $\int_0^2 f_1(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{8}\pi$ verwenden. Was beobachten Sie und welches Konvergenzverhalten liegt vor? Wie erklären Sie sich Ihre Beobachtungen? Decken sich Ihre Ergebnisse mit Ihren Erwartungen?

3. Bonusaufgabe (4 TP)

Zu $n \in \mathbb{N}$ seien Quadraturpunkte $0 \leq z_0 < \cdots < z_n \leq 1$ und Quadraturgewichte $\mu_i = \int_0^1 L_i(z)\,dz$ für $i = 0, \ldots, n$ gegeben, wobei L_i das i-te Lagrange-Polynom ist. Für ein Gitter $a = x_0 < \cdots < x_m = b$ auf $[a, b]$ betrachten wir die summierte Quadraturformel

$$I_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{n} f(x_{ik})\mu_i h_k, \qquad x_{ik} = x_{k-1} + z_i h_k, \qquad h_k = x_k - x_{k-1}.$$

Zeigen Sie für $f \in C^{n+2}([a, b])$ und $h := \max_{k\in\{1,\ldots,m\}} h_k$, dass I_Δ der Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - I_\Delta(f) \right| \leq (b-a)\frac{\|f^{n+2}\|}{(n+2)!}h^{n+2}$$

genügt, falls n gerade ist und die z_i symmetrisch im Intervall $[0, 1]$ liegen.