Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Tobias Kies

11. Übung zur Vorlesung

Numerik I

SoSe 2017

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2017/NumerikI.php

Abgabe: Fr., 14. Juli 2017, 12:00 Uhr

1. Bonusaufgabe (4 TP)
Sei $y : [T_0, T_1] \to \mathbb{R}^d$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = F(t, y(t)), \quad t \in (T_0, T_1], \quad y(T_0) = y_0. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass sich dieses nicht-autonome Anfangswertproblem autonomisieren lässt, indem Sie ein $x : [T_0, T_1] \to \mathbb{R}^{d+1}$ sowie eine Funktion f und einen Startwert x_0 konstruieren, so dass folgendes gilt: x ist genau dann Lösung des autonomen Anfangswertproblems

$$x'(t) = f(x(t)), \quad t \in (T_0, T_1], \quad x(T_0) = x_0,$$

wenn y eine Lösung von (1) ist.

Bonus–Miniaufgaben

Es gibt in diesem Abschnitt zwei Arten von Aufgaben:

1. Klassische Aufgaben, in denen Sie aufgefordert werden, etwas auszurechnen oder zu beweisen. Hier ist wie gewohnt der Aufgabenstellung zu folgen.
2. Aufgaben, in denen nur eine Behauptung formuliert wird. Hier müssen Sie entscheiden, ob die Aussage wahr oder falsch ist und diese Entscheidung durch einen Beweis bzw. durch ein Gegenbeispiel begründen.

Kurze Begründungen sind ausreichend, allerdings müssen Sie dennoch logisch nachvollziehbar sein. Wenn Sie sich auf Inhalte der Vorlesung beziehen, dann geben Sie bitte eine Referenz des zugehörigen Satzes oder zumindest dessen Namen an.

2. Bonusaufgabe (2 TP)

a) Was sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes?

b) Welche dieser Voraussetzungen sind für die folgenden Funktionen (nicht) erfüllt? Für welche dieser Funktionen existiert ein Fixpunkt und ist dieser ggf. eindeutig?

$$f_1\colon (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f_2\colon [-1,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad f_3\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2 \qquad x \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{x_1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x \longmapsto x + \frac{1}{1+x}$$

3. Bonusaufgabe (2 TP)

a) Sei $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a \in (0,\infty)$ und $b, c \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert das Newton–Verfahren angewendet auf Df für beliebige Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen das globale Minimum von f auf $\mathbb{R}$.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ und $f(x) = x^T Ax + b^T x + c$. Dann konvergiert das Newton–Verfahren angewendet auf Df für beliebige Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gegen das globale minimum von f auf $\mathbb{R}^n$.

4. Bonusaufgabe (1 TP)
Sei $M := [-1,1]^2$ und $f \in \mathbb{R}^2 \setminus M$. Dann ist die Lösung des Problems $\min_{x\in M} \|x - f\|_\infty$ nicht eindeutig.

5. Bonusaufgabe (2 TP)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Lösung des Ausgleichsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2$.

6. Bonusaufgabe (2 TP)
Sei V ein Prähilbert–Raum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sei eine Basis eines Unterraums von V. Dann ist die Gramsche Matrix $A = (\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle)_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit.

7. Bonusaufgabe (2 TP)
Sei $V = \operatorname{span}\{\sin, 2\cos\} \subseteq C^0(\mathbb{R})$ sowie $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$ und $f \in C^0(\mathbb{R})$. Formulieren Sie das Problem $\min_{g\in V} \sum_{i=0}^{1} |g(x_i) - f(x_i)|^2$ als quadratisches Ausgleichsproblem und geben Sie die zugehörige Normalengleichung sowie die Lösung des Problems an.

8. Bonusaufgabe (2 TP)

a) Seien H_1, H_2 Givens–Rotationen. Dann ist $H_1 H_2$ symmetrisch.

b) Sei H_1 eine Givens–Rotation und H_2 eine Householder–Reflexion. Dann ist $H_1 H_2$ eine Givens–Rotation.

9. Bonusaufgabe (2 TP)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist die Abbildung

$$P\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad x \longmapsto \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

eine Orthogonalprojektion in $\mathbb{R}^2$ auf range(P) bezüglich des euklidischen Skalarprodukts.

10. Bonusaufgabe (2 TP)
Sei $f(x) = x^4$. Berechnen Sie die Lösung $p \in \mathcal{P}_3$ des Hermite–Interpolationsproblems

$$p(-1) = f(-1), \qquad p'(-1) = f'(-1), \quad p''(-1) = f''(-1), \qquad p(1) = f(1).$$

Es genügt, wenn Sie die Lösung in Newton–Basisdarstellung angeben.

11. Bonusaufgabe (2 TP)
Sei $f \in C^1([-1,1])$ und $x_0 = 0$. Dann existiert eine eindeutige Lösung $p \in \mathcal{P}_3$ des Problems

$$p(x_0) = f(x_0), \qquad p'(x_0) = f'(x_0), \qquad \int_{-1}^{1} p(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

12. Bonusaufgabe (1 TP)
Seien $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Gewichte einer Newton–Cotes–Formel auf $[0,1]$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k = 1.$$

13. Bonusaufgabe (2 TP)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $a \le x_0 < \cdots < x_n \le b$. Dann existieren $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, sodass

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

für alle $f \in \operatorname{span}\{x^n, \dots, x^{2n}\} \subseteq C^0([a,b])$ gilt.

14. Bonusaufgabe (2 TP)
Sei $f(x) = (x^2-1)(x^2-\frac{1}{4})$, $a := -1$, $b := 1$ und $I(f) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Zu einem beliebigen $\hat{x} \in (a,b)$ sei $Q_T(f)$ die summierte Trapezregel angewendet auf f bezüglich des Gitters $(a, \hat{x}, b)$ und $Q_S(f)$ sei die summierte Simpson–Regel angewendet auf f bezüglich $(a, \hat{x}, b)$. Dann existiert $q \in (0,1)$, sodass

$$|I(f) - Q_S(f)| \le q\,|I(f) - Q_T(f)|\,.$$