Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Tobias Kies

2. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

SoSe 2018

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2018/CoMaII.php`

Abgabe: Mittwoch, 09. Mai 2018, 12:15 Uhr

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.

1. Aufgabe (6 TP)
Es seien die Funktion $f(x) = \sin(x)$ sowie die Stützstellen $x_0 = -\pi$, $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$ und $x_3 = \pi$ gegeben.

a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom p in der Newtonschen Darstellung. Verwenden Sie dazu das Neville-Schema.

b) Werten Sie p an der Stelle $x = \frac{3\pi}{2}$ mittels Horner-Schema aus.

c) Stellen Sie p in der Monomdarstellung dar.

d) Fügen Sie die Stützstelle $x_4 = 0$ hinzu und berechnen Sie die dividierte Differenz $f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$.

2. Aufgabe (4 TP)
Beweisen Sie, dass die dividierten Differenzen von der Reihenfolge der Stützstellen unabhängig sind. Genauer: Sei $\sigma \in \mathrm{S}_{n+1}$ eine Permutation der Zahlen $0, \ldots, n$, so gilt

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}].$$

3. Aufgabe (6 PP)
Wir wollen eine Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Hilfe dividierter Differenzen interpolieren und anschließend mit dem Horner-Schema auswerten.

a) Implementieren Sie eine Funktion `A = divided_differences(f,x)`, die zu einer Eingabefunktion f und einem Eingabevektor $x = (x_1, \ldots, x_n)$ paarweise verschiedener Stützstellen die untere Dreiecksmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ der dividierten Differenzen mittels Neville-Schema berechnet. Insbesondere soll für $j \leq i$ also $A_{ij} = f[x_{i-j+1}, \ldots, x_i]$ gelten.

b) Implementieren Sie eine Funktion `s = horner_eval(a,x,y)`, die zu einem gegebenen Vektor $a = (a_1, \ldots, a_n)$ von Newton-Koeffizienten und einem Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n)$ paarweise verschiedener Stützstellen das Horner-Schema im Punkt $y \in \mathbb{R}$ auswertet und das Ergebnis in der Variable s zurückgibt. Dabei entspreche a_i dem Koeffizienten zum Newtonpolynom des Grades $i - 1$.

c) Schreiben Sie eine Skript-Datei `example.m`, in der Sie zu der Funktion $f(x) = \cos(x)$ und für $n = 5$ äquidistante Stützstellen auf $[0, 2\pi]$ die Newton-Koeffizienten des dazugehörigen Interpolationspolynoms p berechnen. Plotten Sie anschließend die Funktionen f und p auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ (inklusive einer Legende zur Beschriftung) und speichern Sie die Abbildung als `comparison.png` ab.

Vermeiden Sie in Ihrer Implementation unnötigen Rechen- und Speicheraufwand.

Zur Abgabe der Programme: Packen Sie die Dateien `divided_differences.m`, `horner_eval.m`, `example.m` und `comparison.png` in ein ZIP-Archiv und benennen Sie dieses mit dem ZEDAT-Accountnamen eines Ihrer Gruppenmitglieder. Schicken Sie das Archiv samt einer Liste aller Gruppenmitglieder per Email an Ihren zuständigen Tutor. Achten Sie bei den Dateinamen bitte auch auf Groß- und Kleinschreibung.