Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Tobias Kies

3. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

SoSe 2018

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2018/CoMaII.php`

Abgabe: Donnerstag, 17. Mai 2018, 12:15 Uhr

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.

1. Aufgabe (4 TP)
Sei $f \in C^\infty([a,b])$ derartig, dass ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $\|f^{(k)}\|_\infty \leq c$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Weiter sei zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Liste paarweise verschiedener Stützstellen $(x_{ni})_{i\in\{0,\dots,n\}}$ gegeben. Bezeichne mit $p_n \in \mathcal{P}_n$ das Interpolationspolynom, das $p_n(x_{ni}) = f(x_{ni})$ für $i \in \{0,\dots,n\}$ erfüllt. Beweisen Sie

$$\|f - p_n\|_\infty \in \mathcal{O}\left(e^{-n}\right) \text{ für } n \to \infty.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die für alle $k \in \mathbb{N}$ gültige Abschätzung $k! \geq \sqrt{2\pi k}(\frac{k}{e})^k$ verwenden.

2. Aufgabe (12 PP)
Im Folgenden möchten wir das Fehlerverhalten von Interpolationspolynomen auf dem Intervall $[a,b] = [-5,5]$ für $n \to \infty$ numerisch untersuchen. Für $f \in C([a,b])$ approximieren wir hierfür die Maximumsnorm $\|f\|_\infty$ durch die *diskrete Maximumsnorm* (mit 1001 gleichverteilten Stützstellen)

$$\|f\|_h := \max_{i\in\{0,\dots,1000\}} \left| f\left(a + \frac{i(b-a)}{1000}\right)\right|.$$

Zu $n \in \mathbb{N}$ werden wir neben *äquidistanten Stützstellen*

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}, \text{ für } i \in \{0,\dots,n\}$$

auch *Tschebyschow-Stützstellen*

$$y_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right), \text{ für } i \in \{0,\dots,n\}$$

verwenden.

a) Sei $f(x) = \sin(x)$. Untersuchen Sie den Interpolationsfehler $\|f - p_n\|_h$ für $n \to \infty$ sowohl unter Verwendung äquidistanter Stützstellen als auch unter Verwendung von Tschebyschow-Stützstellen.

b) Sei $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$. Untersuchen Sie den Interpolationsfehler $\|f - p_n\|_h$ für $n \to \infty$ sowohl unter Verwendung äquidistanter Stützstellen als auch unter Verwendung von Tschebyschow-Stützstellen.

c) Seien $f_1(x) = \mathrm{sign}(x) \cdot x^2$ und $f_2(x) = \mathrm{sign}(x) \cdot x^3$. Untersuchen Sie die Interpolationsfehler $\|f_i - p_n\|_h$ für $n \to \infty$ unter Verwendung von Tschebyschow-Stützstellen. Man beobachtet in diesem Fall $\|f_i - p_n\|_h \in \mathcal{O}(n^{c_i})$. Was sind die Werte der c_i?

Beschreiben Sie jeweils Ihre Beobachtungen und erklären Sie diese. Gehen Sie insbesondere auf Kondition, Stabilität, bekannte Fehlerabschätzungen und Konvergenzgeschwindigkeit ein. Fügen Sie Ihren Ausführungen geeignete Plots bei.

Hinweise:

- Natürlich können Sie am Computer nicht „$n \to \infty$" betrachten. Für die obigen Beispiele ist im Groben das Intervall $n \in \{1, \ldots, 100\}$ angemessen. Sie können aber natürlich auch ein anderes Intervall wählen, wenn sich dieses – beispielsweise durch Ihre Implementation bedingt – für Ihre Beobachtungen besser eignet.

- Sie dürfen Sich aussuchen, wie Sie die Interpolation genau durchführen. Es bietet sich die Interpolation mit Newton-Polynomen von Blatt 2 an, sie können aber auch die Lagrange-Interpolation von Blatt 1 verwenden. Sie bekommen bis zu 2 Bonuspunkte, wenn Sie in Ihren Betrachtungen beide Interpolationsarten verwenden und ggf. auf Unterschiede eingehen und diese begründen.

- Bevor Sie mit dem Aufschreiben beginnen, sollten Sie Ihre Implementation sicherheitshalber auf Plausibilität prüfen, beispielsweise indem Sie auch Funktionenplots von f und p_n für kleine n anfertigen.

Zur Abgabe der Programme: Sie müssen *keine Programme per Email* abgeben. Für die Bewertung sind ausschließlich Ihre schriftlichen Ausführungen relevant. Diese dürfen allerdings auch digital angefertigt werden, müssen also nicht handschriftlich sein.