Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Tobias Kies

4. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

SoSe 2018

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2018/CoMaII.php

Abgabe: Donnerstag, 24. Mai 2018, 12:15 Uhr

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.

1. Aufgabe (4 TP)

a) Zeigen Sie, dass die Newton-Côtes-Formeln für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ symmetrisch sind, also $\lambda_i = \lambda_{n-i}$ für $i \in \{0, \ldots, n\}$ gilt.

b) Beweisen Sie für die Gewichte λ_k der Newton–Côtes-Formeln die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k = 1.$$

2. Aufgabe (3 TP)

a) Bestimmen Sie die relative Kondition des Integrationsoperators

$$I\colon C([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f \longmapsto \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

bezüglich der Maximumsnorm auf $C([a,b])$. Wann kann die relative Kondition beliebig schlecht werden?

b) Wie verhalten sich die absolute und die relative Kondition der Integration der Funktion $\sin((2n+1)x)$ auf dem Intervall $[0,\pi]$ für $n \to \infty$?

3. Aufgabe (3 TP)

Sei $x_0 = -1$, $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = 1$. Bestimmen Sie $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, sodass für alle $p \in \mathcal{P}_2$ gilt:

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{2} c_i\, p(x_i).$$

4. Aufgabe (6 PP)
Wir möchten das Integral

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

numerisch approximieren. Dazu unterteilen wir das Intervall $[0,1]$ äquidistant in n Teilintervalle mit den Grenzen $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ und berechnen die sogenannte *Riemann-Summe*

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \approx \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

mit Punkten $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

a) Schreiben Sie ein `Matlab`-Programm `riemann(I,f,n,q)`, das diese Riemann-Summe berechnet. Dabei bezeichnet der Vektor `I` das Integrationsintervall, `f` die zu integrierende Funktion, `n` die Anzahl der Teilintervalle und $0 \leq \mathtt{q} \leq 1$ einen Wert, der durch $\xi_k = x_{k-1} + \mathtt{q}(x_k - x_{k-1})$ die Lage der Werte ξ_k festlegt.

b) Schreiben Sie eine Skript-Datei `example.m`, in der Sie den Fehler der Riemann-Summe für das obige Problem über $n \in \{1, \ldots, 500\}$ einmal für $\mathtt{q} = 0$ und einmal für $\mathtt{q} = 0.5$ plotten. Wählen Sie für den Plot eine geeignete logarithmische Skalierung sowie eine geeignete Beschriftung und speichern Sie diesen als PNG-Datei `riemann_error.png` ab. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse. Was können Sie beobachten und wie erklären Sie sich dieses Verhalten?

Hinweis: Für die Berechnung des Fehlers können Sie `0.5*erf(1)*sqrt(pi)` als Vergleichswert heranziehen.

Zur Abgabe der Programme: Packen Sie die Dateien `riemann.m`, `example.m` und `riemann_error.png` in ein ZIP-Archiv und benennen Sie dieses mit dem ZEDAT-Accountnamen eines Ihrer Gruppenmitglieder. Schicken Sie das Archiv samt einer Liste aller Gruppenmitglieder per Email an Ihren zuständigen Tutor. Achten Sie bei den Dateinamen bitte auch auf Groß- und Kleinschreibung.