Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Tobias Kies

5. Übung zur Vorlesung

# Computerorientierte Mathematik II

SoSe 2018

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2018/CoMaII.php`

**Abgabe: Donnerstag, 31. Mai 2018, 12:15 Uhr**

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.

**1. Aufgabe** (5 TP)
Die $n$-te Newton–Côtes-Quadraturformel ist so konstruiert, dass sie Polynome $p \in P_n$ auf $[0,1]$ exakt integriert. Zeigen Sie, dass für gerades $n$ sogar Polynome vom Grad $n+1$ exakt integriert werden.

**2. Aufgabe** (5 TP)
Sei $f \in C([a,b])$ gegeben. Wir möchten $I(f) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ mit Hilfe einer Quadraturformel $I_1(f)$ approximieren, die von einer Gitterweite $h$ abhängt. Um den Fehler $e := |I(f) - I_1(f)|$ abschätzen zu können, verwenden wir eine zweite Quadraturformel $I_2(f)$ und den Fehlerschätzer $\widetilde{e} := |I_1(f) - I_2(f)|$.
Wir machen die folgenden Annahmen:

– Die Formel $I_1$ hat höchstens Ordnung $p_1 > 0$, es gilt also für ein $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\alpha h^{p_1} \leq |I(f) - I_1(f)|.$$

– Die Formel $I_2$ hat mindestens Ordnung $p_2 > p_1$, es gilt also für ein $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\beta h^{p_2} \geq |I(f) - I_2(f)|.$$

Zeigen Sie:

a) Mit der Effizienzspanne $c := \frac{\beta}{\alpha}$ sowie mit $q := p_2 - p_1$ gilt

$$\frac{\widetilde{e}}{1 + ch^q} \leq e \leq \frac{\widetilde{e}}{1 - ch^q}.$$

b) Es gilt

$$\frac{|e - \widetilde{e}|}{e} \in \mathcal{O}(h^q) \text{ für } h \to 0.$$

**3. Aufgabe** (6 PP)
Wir möchten die summierten Newton–Côtes-Formeln implementieren und deren Fehler-Verhalten untersuchen.

a) Schreiben Sie eine Funktion `[S,A] = summed_newton_cotes(a,b,f,k,n)`, die die Newton–Côtes-Formel $S_n^{(k)}$ implementiert. Dabei bestimmen `a` und `b` das Integrationsintervall, `f` sei die zu integrierende Funktion und `n` die Anzahl der Intervalle, auf denen die `k`-te Newton–Côtes-Formel (mit $k \in \{1, 2, 6\}$) angewendet wird. In der Variablen `S` werde hierbei der Wert der Quadraturformel zurückgegeben und in `A` die Anzahl der durchgeführten `f`-Auswertungen.

   **Hinweis:** Sie können die entsprechenden Quadraturgewichte dem Vorlesungsskript entnehmen.

b) Wir möchten die Approximation des Integrals $I := \int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x$ untersuchen. Erstellen Sie hierzu für die Funktion $f(x) = \sin(x)$ und für das Intervall $[a, b] = [0, \pi]$

   – eine Abbildung, in der die Fehlerkurven $|I - S_n^{(k)}|$ für $k \in \{1, 2, 6\}$ doppelt logarithmisch gegen $n \in \{1, \ldots, 1000\}$ geplottet werden,

   – und eine Abbildung, in der die Anzahl der `f`-Auswertungen über den Quadraturfehler $|I - S_n^{(k)}|$ für $k \in \{1, 2, 6\}$ doppelt logarithmisch als Punkt-Plot dargestellt wird.

   Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse insbesondere vor dem Hintergrund der unterschiedlichen Ordnung der Verfahren und der Glattheit von $f$.

c) Verfahren sie analog für $f(x) = \sqrt{x} + \sin(21\pi x)$ auf dem Intervall $[0, 1]$.

**Hinweis:** Es gilt $\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = 2$ und $\int_0^1 \sqrt{x} + \sin(21\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{21}\left(7 + \frac{1}{\pi}\right)$.

**Zur Abgabe der Programme:** Packen Sie die Datei `summed_newton_cotes.m`, Ihr Skript zum Erzeugen der Abbildungen sowie die von Ihnen erstellten Bilddateien in ein ZIP-Archiv und benennen Sie dieses mit dem ZEDAT-Accountnamen eines Ihrer Gruppenmitglieder. Schicken Sie das Archiv samt einer Liste aller Gruppenmitglieder per Email an Ihren zuständigen Tutor. Achten Sie bei den Dateinamen bitte auch auf Groß- und Kleinschreibung.