Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Tobias Kies

8. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

SoSe 2018

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2018/CoMaII.php`

Abgabe: Donnerstag, 21. Juni 2018, 12:15 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)
Sei $\lambda \in \mathbb{R}_{\leq 0}$ oder gelte $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ mit einer Schrittweite $\tau \leq \tau_0$, wobei $\tau_0 < \frac{1}{\lambda}$. Zeigen Sie: Das implizite Euler-Verfahren (3.37) aus dem Skript ist konsistent mit Ordnung $p = 1$.

2. Aufgabe (6 TP)
Sei $\lambda, x_0 \in \mathbb{R}$ und $f \in C^1([0,\infty))$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x'(t) &= \lambda x(t) + f(t), \quad 0 < t < T \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass dieses Problem eine Lösung $x \in C^3([0,\infty))$ besitzt.
Zu $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Schrittweite $\tau := \frac{T}{n}$ und Zeitpunkte $t_k := k\tau$. Wir definieren x_{k+1} für $k \in \{1, \dots, n\}$ iterativ durch

$$\begin{aligned} y_k &:= \lambda x_k + f(t_k) + \frac{\tau}{2}\left(f'(t_k) + \lambda^2 x_k + \lambda f(t_k)\right) \\ x_{k+1} &:= x_k + \tau y_k. \end{aligned}$$

a) Beweisen Sie, dass das so definierte Verfahren die Konsistenzordnung $p = 2$ hat.

b) Sei $f \equiv 0$. Für welche Schrittweiten ist das Verfahren im Falle von $\lambda > 0$ bzw. $\lambda < 0$ stabil?

3. Aufgabe (6 TP)
Seien $x_\Delta, \tilde{x}_\Delta$ die mit dem impliziten Euler-Verfahren (3.37) berechneten Näherungslösungen zu den Anfangswerten x_0, $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}$ sowie den diskreten rechten Seiten f_Δ, $\tilde{f}_\Delta$ mit $f_\Delta(t_k) = f_k$, $\tilde{f}_\Delta(t_k) = \tilde{f}_k$, $k = 1, \dots, n$. Zeigen Sie für $\lambda \leq 0$ die Abschätzung

$$\|x_\Delta - \widetilde{x}_\Delta\|_\infty \leq (1+T) \max\left\{|x_0 - \widetilde{x}_0|, \|f_\Delta - \widetilde{f}_\Delta\|\|_\infty\right\}.$$