Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Tobias Kies

9. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

SoSe 2018

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2018/CoMaII.php

Abgabe: Donnerstag, 28. Juni 2018, 12:15 Uhr

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise.

1. Aufgabe (4 TP)
Eine Differentialgleichung $x'(t) = f(t, x(t))$ heißt autonom, wenn die rechte Seite f nicht explizit von der freien Variable t abhängt, d. h. wenn $f(t, y) = f_0(y)$ für alle $y \in \mathbb{R}^m$ und $t \in \mathbb{R}_{>0}$ mit einer t-unabhängigen Abbildung $f_0 \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ gilt.

Leiten Sie für das nichtautonome Anfangswertproblem zweiter Ordnung

$$x''(t) = \lambda x(t) + \mu e^t, \qquad x(0) = x_0, \qquad x'(0) = x_0', \qquad x \colon [0, T] \to \mathbb{R}$$

ein äquivalentes lineares, autonomes Anfangswertproblem erster Ordnung

$$u'(t) = Au(t), \qquad u(0) = u_0, \qquad u \colon [0, T] \to \mathbb{R}^3$$

mit konstanter Matrix A her.

Hinweis: Setzen Sie $u_3(t) = \mu e^t$.

2. Aufgabe (6 TP)
Zu einer beliebigen Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$y'(t) = Ay(t).$$

a) Seien $x \colon [0, T] \to \mathbb{R}^m$ und $y \colon [0, T] \to \mathbb{R}^m$ Lösungen der obigen Differentialgleichung. Zeigen Sie für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$, dass auch $z = ax + by$ eine Lösung ist.

b) Beweisen Sie für beliebiges $c \in \mathbb{R}_{>0}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix},$$

dass

$$x(t) = \begin{pmatrix} \sin(ct) \\ \cos(ct) \end{pmatrix}, \qquad y(t) = \begin{pmatrix} -\cos(ct) \\ \sin(ct) \end{pmatrix}$$

Lösungen der Differentialgleichung sind.

c) Sei A wie in Teilaufgabe b) sowie $y_0 \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Bestimmen Sie eine Funktion y, die die obige Differentialgleichung löst und $y(0) = y_0$ erfüllt.

3. Aufgabe (6 PP)
In dieser Aufgabe möchten wir das vereinfachte Zweikörperproblem

$$x_1''(t) = m_2 \cdot \frac{x_2(t) - x_1(t)}{\|x_2(t) - x_1(t)\|^3}, \qquad x_2''(t) = m_1 \cdot \frac{x_1(t) - x_2(t)}{\|x_1(t) - x_2(t)\|^3}$$

mit Funktionen $x_i \colon [0, T] \to \mathbb{R}^2$ und Startwerten $x_1(0) = x_{0,1}$, $x_1'(0) = x_{0,1}'$, $x_2(0) = x_{0,2}$, $x_2'(0) = x_{0,2}'$ numerisch mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahrens lösen. Hierzu nutzen wir die Tatsache, dass sich das obige System äquivalent als

$$u'(t) = F(u(t)), \qquad u(0) = u_0$$

mit $u = (x_1, x_1', x_2, x_2')^T \in (\mathbb{R}^2)^4$ sowie

$$F(v) = \begin{pmatrix} v_2 \\ m_2(v_3 - v_1)/\|v_3 - v_1\|^3 \\ v_4 \\ m_1(v_1 - v_3)/\|v_1 - v_3\|^3 \end{pmatrix}, \qquad u_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,1}' \\ x_{0,2} \\ x_{0,2}' \end{pmatrix}$$

schreiben lässt. Weiter sei angemerkt, dass die Iterierten des expliziten Euler-Verfahrens analog zum eindimensionalen Fall durch

$$u_{k+1} = u_k + \tau F(u_k)$$

definiert sind.
Lösen Sie dieses System numerisch für die Modell-Werte $m_1 = 2$, $m_2 = 1$ und

$$x_{0,1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{0,1}' = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_{0,2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{0,2}' = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

sowie mit den numerischen Parametern $T = 10^3$ und $\tau = \frac{1}{10}$. Visualisieren Sie Ihre Ergebnisse auf eine geeignete Weise.

Zur Abgabe der Programme: Packen Sie Ihr Skript zum Erzeugen der Iterierten und der Abbildungen sowie die von Ihnen erstellten Abbildungen in ein ZIP-Archiv und benennen Sie dieses mit dem ZEDAT-Accountnamen eines Ihrer Gruppenmitglieder. Schicken Sie das Archiv samt einer Liste aller Gruppenmitglieder per Email an Ihren zuständigen Tutor. Achten Sie bei den Dateinamen bitte auch auf Groß- und Kleinschreibung.