Zuse Institute Berlin (ZIB)
Freie Universität Berlin
S. Röblitz, P. Koltai, S. Winkelmann, L. Fischer

# Probleklausur

Numerik I, SS 2018

Freiwillige Abgabe: 16. Juli 2018, 10:00 Uhr (Tutorfach oder in der Vorlesung)

**Aufgabe 1 (Multiple Choice, unbewertet)**

Kreuzen Sie korrekte Aussagen an. Es können mehrere Antworten richtig sein, mindestens eine ist korrekt. Eine Aufgabe gilt als erfolgreich gelöst, wenn alle richtigen Antworten angekreuzt sind und keine falsche.

(a) Es sei $S^3_\Delta$ der Raum aller kubischen Splinefunktionen zu den Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$. Welche der folgenden Funktionen sind aus $S^3_\Delta$?

☐ $f(x) = x^3 - x^2$ ☐ $f(x) = (x-2)^4$

☐ $f(x) = \max\{0, (x-1)^3\} - \frac{1}{2}x^3$ ☐ $f(x) = x^3 - |x|$

(b) Der diskrete Fluss eines Runge-Kutta-Verfahrens ist gegeben durch

$$\psi^\tau x = x + \tau\frac{1}{2}(f(x) + f(\psi^\tau x)).$$

Welche Butcher-Schemata charakterisieren dieses Verfahren?

☐ $\begin{array}{c|cc} & 0 & 0 \\ & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$ ☐ $\begin{array}{c|cc} & 0 & 0 \\ & 0 & 1/2 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$ ☐ $\begin{array}{c|cc} & 1/2 & 1/2 \\ & 1/2 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/4 \end{array}$ ☐ $\begin{array}{c|cc} & 0 & 0 \\ & 1/4 & 1/4 \\ \hline & 3/4 & 1/4 \end{array}$

(c) Seien $f \in C([a,b])$ und Stützstellen $x_0, x_1, x_2 \in [a,b]$ beliebig. Betrachten wir die folgenden Polynome

- $p_1 \in \mathcal{P}_1$: Das Interpolationspolynom zu $x_0, x_2$
- $p_2 \in \mathcal{P}_2$: Das Interpolationspolynom zu $x_0, x_1, x_2$
- $q_1 \in \mathcal{P}_1$: Die Bestapproximation von $f$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ in $\mathcal{P}_1$
- $q_2 \in \mathcal{P}_2$: Die Bestapproximation von $f$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ in $\mathcal{P}_2$

so gilt:

☐ $\|f - p_2\|_\infty \leq \|f - p_1\|_\infty$ ☐ $\|f - q_2\|_\infty \leq \|f - q_1\|_\infty$

☐ $\|f - q_2\|_\infty \leq \|f - p_2\|_\infty$ ☐ $\|f - p_1\|_\infty \leq \|f - q_2\|_\infty$

(d) Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit euklidischem Skalarprodukt $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$. Betrachte die Funktion $P : V \to U$ mit $U = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_2 = 0\} \subset V$

$$Px = (x_1 + x_2, 0).$$

Dann ist $P$

- ☐ eine Projektion, aber keine Orthogonalprojektion
- ☐ keine Projektion
- ☐ eine Orthogonalprojektion, aber keine Projektion
- ☐ eine Orthogonalprojektion

(e) Das Minimum $x^* = 0$ der Funktion $f(x) = x^4 - 1$ soll numerisch berechnet werden. Bekanntlich gilt im Minimum $f'(x^*) = 0$. Wir betrachten deshalb die Fixpunktiteration für $\phi(x) = f'(x) + x$ und das Newton-Verfahren für $g(x) = f'(x)$.

- ☐ Die Fixpunktiteration konvergiert für jeden Startwert.
- ☐ Das Newtonverfahren konvergiert für jeden Startwert.
- ☐ Das Newtonverfahren konvergiert für jeden Startwert quadratisch.
- ☐ Das Newtonverfahren konvergiert für keinen Startwert quadratisch außer für $x_0 = x^*$.

**Aufgabe 2 (Normierte Räume, 4 Zusatz-TP)**
Zeigen Sie:

(a) Ist $V$ mit Norm $\|\cdot\|$ ein Prähilbertraum, so gilt:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

(b) Für $V = \mathbb{R}^d$ mit der Supremumsnorm $\|x\|_\infty = \max\limits_{k=1,\ldots,d} |x_k|$ existiert kein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_\infty$ mit der Eigenschaft

$$\|x\|_\infty = \sqrt{\langle x, x\rangle_\infty}$$

**Aufgabe 3 (Interpolation, 4 Zusatz-TP)**

(a) Gesucht ist ein Polynom zweiten Grades $p \in \mathcal{P}_2$, für das gilt:

$$p(1) = 4 \qquad p'(1) = 3 \qquad p'(2) = 7.$$

Leiten Sie ein Gleichungssystem für die Koeffizienten des Polynoms her und lösen Sie dieses, um das Interpolationspolynom zu bestimmen.

(b) Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ und $x_1 > x_0$ beliebig. Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p \in \mathcal{P}_1$ mit

$$p(x_0) = f(x_0) \qquad p(x_1) = f(x_1).$$

Zeigen Sie, dass das Interpolationspolynom für $x_1 \to x_0$ punktweise gegen das Polynom $p_* \in \mathcal{P}_1$ konvergiert, das das Hermite-Interpolationsproblem

$$p_*(x_0) = f(x_0) \qquad p_*'(x_0) = f'(x_0).$$

löst.

**Aufgabe 4 (Runge-Kutta-Verfahren, 4 Zusatz-TP)**
Gegeben ist die gewöhnliche Differentialgleichung für $z(t) = (x(t), y(t))$

$$z'(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ -x(t) \end{pmatrix} \qquad z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für das Runge-Kutta-Verfahren $z_{k+1} = \psi^\tau z_k$ mit den Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

und Anfangswert $z_0$ mit $\|z_0\|_2 > 0$ gilt für alle $\tau > 0$:

$$\|z_k\|_2 \to \infty.$$

(b) Für das Runge-Kutta-Verfahren $z_{k+1} = \psi^\tau z_k$ mit den Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|c} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

und Anfangswert $z_0$ mit $\|z_0\|_2 = 1$ gilt für alle $\tau > 0$:

$$\|z_k\|_2 = 1 \ \forall k.$$