16.04.18

Numerik 1

VL
Mo 10-12 A3, HS 001
Mi 10-12 A6, 031

Tutorien
Mo ~~D~~ 16-18 } Adrian Ottens
Do 12-14 }
Fr 12-14 } Florian Dorner
Fr 16-18 }

1. Termin: Do 26.04.
(letzter Termin Mo 16.07.)

Übungszettel: Ausgabe Mo 16:00 ; Abgabe Mo (nächste Woche) 18^{00}
(Tutorenfächer)

Homepage: http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2018/Numerik1.php

Übungszettelbewertung:
- Theorie (TP), Praxis (PP) + 1x Vorrechnen im Tutorium
- je 60% der Punkte
- Bearbeitung in 2er Gruppen

Programmierung:
- in Matlab (oder Octave)
- kommentierter Code
- an die Tutoren schicken: ottensadrian@yahoo.de
  floriandorner@gmx.de
- falls ausführlichere Korrektur gewünscht, Code für ÜB-Abgabe ausdrucken

Klausur: voraussichtlich Mi 18.07.
(2. Termin im Herbst)

VL 30.04. fällt aus (Mo)

Sprechstunde: Di 14-15 Uhr, ZIB, Raum 4104 (2.06)
(Takustr. 7)

Inhalt:
I. Nichtlineare Gleichungssysteme
II. Bestapproximation & lineare Ausgleichsprobleme
III. Interpolation
IV. ~~Quadratur~~ Numerische Quadratur
V. Anfangswertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen

I. Nichtlineare Gleichungssysteme

I.1 Eindeutigkeit & Kondition

1.1 Problemformulierung

gesucht x^* mit $f(x^*) = 0$ mit $f: \Omega \to \mathbb{R}^d$ stetig,
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x^* \in \Omega$ „Nullstellenproblem"

Beispiele:
- lineare Gleichungssysteme $Ax = b \iff \underbrace{Ax - b}_{f(x)} = 0$
  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}, b \in \mathbb{R}^d$
  - Lösbarkeit: LinA II
  - Lösungsverfahren (LinA I, CoMa): Gauß-Elemination (direktes Lösungsverfahren)
- nichtlineares Gleichungssystem

$$f(x) = \begin{pmatrix} 10(x_2 - x_1) \\ (20 - x_3)x_1 - x_2 \\ x_1 x_2 - \frac{8}{3} x_3 \end{pmatrix}$$

direktes Lösen nicht möglich
stattdessen: indirekte (iterative) Lösungsverfahren

1.2 Fragen

$\left.\begin{array}{l}\text{Existenz?} \\ \text{Eindeutigkeit?} \\ \text{Sensitivität?}\end{array}\right\}$ wohlgestellt nach Hadamard

Einfluss ↳ Algorithmus

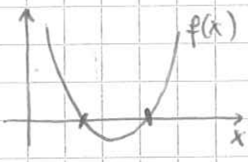
Schwierigkeiten: keine globale / allg. Existenztheorie
(manchmal Einzeltheorie, z.B. für lineare Gleichungssysteme: $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ $Ax = b$ eindeutig lösbar)

Ab jetzt: Existenz von x^* wird angenommen

16.04.18

Ab jetzt: Algorithmus soll erkennen, ob Lösung eventuell nicht existiert

Eindeutigkeit fast nie global gegeben:
Lösung meist lokal eindeutig



1.3 Lokale Eindeutigkeit

Definition: $x^* \in \Omega$ heißt lokal eindeutige Lösung von $f(x)=0$, wenn es eine Umgebung U von x^* gibt, sodass x^* die eindeutige Lsg. in U ist.

Satz: (hinreichende Bedingung für lokale Eindeutigkeit)
Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und $x^* \in \Omega$ mit $f(x^*)=0$.
Gilt $Df(x^*) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ nicht singulär, so ist x^* lokal eindeutig.

Beweis-idee: angenommen, x^* nicht lokal eindeutig, d.h. $\exists x_1^*, x_2^*$ mit $f(x_1^*) = f(x_2^*) = 0$

$d=1$: $\exists \xi \in [x_1^*, x_2^*]$ $(x_1^* < x_2^*)$, sodass

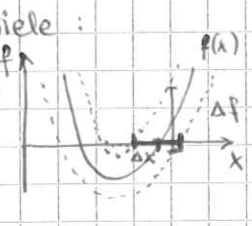
$$0 = \frac{f(x_1^*) - f(x_2^*)}{x_1^* - x_2^*} \overset{\text{Mittelwert-}}{\underset{\text{satz}}{=}} Df(\xi), \text{ d.h. } f \text{ singulär in } \xi \ ↯$$

1.4 Kondition

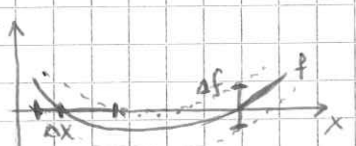
Problemstellung: $f \longmapsto x^*$
Eingabe Ausgabe

Störung: $f(x) \longmapsto f(x) + \Delta f(x)$
$(f + \Delta f)(x)$

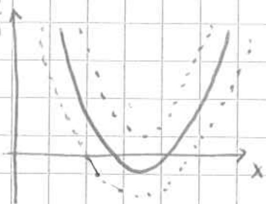
Beispiele:

a) 

gut konditioniertes Problem
$\|\Delta x\| \approx \|\Delta f\|$ $\quad \kappa \approx 1$

b) 

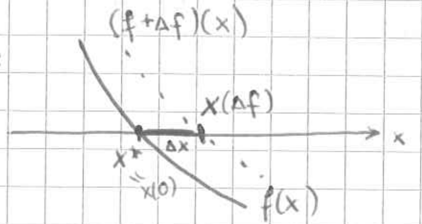
$\|\Delta x\| \gg \|\Delta f\|$ schlecht konditioniert
$\kappa \gg 1$

c) 

: Existenz von x^* bedroht

schlecht gestelltes Problem

$\kappa = \infty$

Allgemein: 

absolute normweise Kondition:

$$\kappa = \| D x^*(\Delta f)\|_{\Delta f = 0} \overset{\text{1. Ordnung}}{\approx} \frac{\|\Delta x\|}{\|\Delta f\|}$$

Satz: $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)^{\circledast}$. Die absolute normweise Kondition bzgl. konstanter Störung Δf ist $\kappa(x^*) = \| Df(x^*)^{-1}\|$.

$\circledast$ und $Df(x^*)$ nicht singulär.

Beweis: Es gibt für hinreichend kleines $\|\Delta f\|$ eine Funktion $x(\Delta f)$, sodass $\underbrace{f(x(\Delta f)) + \Delta f = 0}_{(*)}$ (Satz über inverse Funktionen)

$x(\Delta f)$ ist C^1 in Δf und $x(0) = x^*$.

Differenzieren $^{(*)}$ nach Δf und Auswertung bei $\Delta f = 0$

$$0 = \cancel{D_{\Delta f}\, x(\Delta f)}\; D_{\Delta f}\Big(f(x(\Delta f)) + \Delta f\Big) = D_x f(\underset{\sim}{x})\big|_{x(\Delta f)} \cdot D_{\Delta f}\, x(\Delta f) + \underset{[d \times d]}{J}$$

$$\overset{\Delta f = 0}{=} D_x f(x^*) \cdot D_{\Delta f}\, x(0) + J$$

J... Einheitsmatrix

$$\Rightarrow \quad D_{\Delta f}\, x(0) = - D_x^{-1} f(x^*)$$

$$\kappa = \| D_{\Delta f}\, x(0)\| \overset{\text{Satz}}{=} \| D_x f(x^*)^{-1}\|$$