I.2 FIXPUNKT-ITERATION

1.5 WIESO ITERATION?

(a) Manche Gleichungssysteme können nicht mit endlich vielen Elementarops $\{+,-,:,*,\sqrt{\ }\}$ exakt gelöst werden.

Bsp: $x^5 - x - 1 = 0$ (Galoistheorie)

(b) Manchmal sind "Direktlöser" nicht effizient oder gar nicht anwendbar.

$Ax = b$ für $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ und $d \gg 1$. LR-Zerlegung: $\mathcal{O}(d^3)$

⇝ Man versucht eine Approximation mit vorgeschriebener Genauigkeit zu erzielen.

1.6 Iterationsverfahren

Ziel: Konstruiere Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ so dass $x_n \to x^*$ für $n \to \infty$,

d.h. wir können beliebige Genauigkeit in endlich vielen Schritten erzielen:

$$\| x_{n_0} - x^* \| < TOL$$

k-Schritt-Verfahren:

$$x_{n+k} := \varphi(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1})$$

In der Praxis: $k = 1, 2$

1.7 Fixpunktiteration

$k=1$: $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$

x_0 gegeben

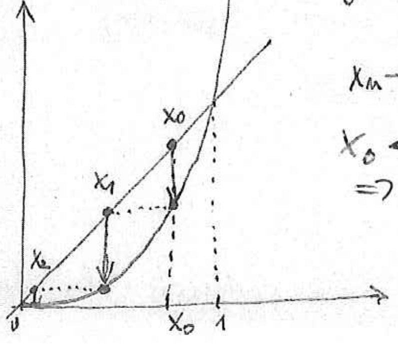
Fall $x_n \to x^*$, und ϕ stetig, dann

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & \phi(x_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x^* & = & \phi(x^*) \end{array} \implies x^* \text{ ist Fixpunkt}$$

Konstruktion: Aus $f(x^*) = 0$ mache $\phi(x^*) = x^*$, so dass Fxpt-iteration konvergiert.

Beispiel: $f(x) = x(x-1)$ ⇝ $\phi(x) = f(x) + x = x^2$

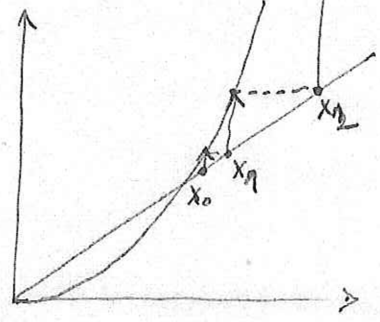
↑ Lsg nicht eindeutig



$x_n \to 0$

$x_0 < 1$

$\Rightarrow$ Konvergenz



$x_n \to \infty$

$x_0 > 1$,

$\Rightarrow$ Divergenz

Typen von Konvergenzsätzen:

I) Globales Resultat

a) liefern Existenz & Eindeutigkeit

b) schwer überprüfbare Bedingungen

II) Lokales Resultat

a) Existenz von x^* vorausgesetzt

b) a posteriori überprüfbare Voraussetzungen $\rightsquigarrow$ ermöglicht algorithmische Prüfung

1.8 Globaler Satz (Banach'scher Fixpunktsatz)

Satz: Sei $\bar{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen und $\phi: \bar{\Omega} \to \bar{\Omega}$ (Selbstabbildung) eine ~~strikt~~ Kontraktion, d.h. es gibt ein $0 \le \vartheta < 1$ mit $\|\phi(x) - \phi(y)\| \le \vartheta \|x - y\| \quad \forall x, y \in \bar{\Omega}$.

Lipschitz-Konstante

Dann gilt: Für jedes $x_0 \in \bar{\Omega}$ konvergiert

$x_{n+1} = \phi(x_n) \to x^* = \phi(x^*)$, mit

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{\vartheta^n}{1-\vartheta} \|x_1 - x_0\| \qquad \text{"a priori Schranke"}$$

$$\|x_{n+1} - x^*\| \le \frac{\vartheta}{1-\vartheta} \|x_{n+1} - x_n\| \qquad \text{"a posteriori Schranke"}$$

Der Fixpunkt x^* ist eindeutig

Beweis: $\rho_n := \|x_{n+1} - x_n\| = \|\phi(x_n) - \phi(x_{n-1})\| \le \vartheta \|x_n - x_{n-1}\| = \vartheta \rho_{n-1}$

$\le \dots \le \vartheta^n \rho_0$

Daher gilt:

$$\|x_{n+l+1} - x_n\| \le \sum_{i=n}^{n+l} \rho_i \le \vartheta^n \rho_0 \sum_{i=0}^{l} \vartheta^i \le \vartheta^n \rho_0 \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \vartheta^i}_{\text{geom. Reihe}}$$

$$= \frac{\vartheta^n}{1-\vartheta} \rho_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Rightarrow \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchy-Folge}$$

Da $\bar{\Omega}$ abgeschlossen, $\exists x^* \in \bar{\Omega}$ mit $x_n \to x^*$. Für $l \to \infty$ folgt

$$\|x^* - x_n\| \le \frac{\vartheta^n}{1-\vartheta} \|x_1 - x_0\| \qquad \text{(a-priori-Schranke)}$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\|x_{n+1} - x^*\| \le \|\phi(x_n) - \phi(x_{n+1})\| + \|\phi(x_{n+1}) - \phi(x^*)\|$$

$$\le \vartheta \|x_n - x_{n+1}\| + \vartheta \|x_{n+1} - x^*\|$$

$$\Rightarrow \|x_{n+1} - x^*\| \le \frac{\vartheta}{1-\vartheta} \|x_n - x_{n+1}\| \qquad \text{(a-posteriori-Schranke)}.$$

ϕ strikte Kontraktion $\Rightarrow$ ϕ stetig : ~~$\phi(x_{n+1})$~~ $\overset{1.7}{\Rightarrow}$ $\phi(x^*) = x^*$

Sei x^{**} zweiter FP, dann

$$\|x^*-x^{**}\| = \|\phi(x^*)-\phi(x^{**})\| \le \vartheta \|x^*-x^{**}\|$$

$$\Rightarrow \|x^*-x^{**}\| = 0.$$

∎

1.9 Lokaler Konvergenzsatz

Satz: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $\phi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ mit $x^* = \phi(x^*)$, $x^* \in \Omega$. Gilt $\|D\phi(x^*)\| = \vartheta_* < 1$, so ist die FP-Iteration lokal konvergent, d.h. für x_0 hinreichend nahe an x^*.

Beweis: Taylorentwicklung:

$$x_{n+1} - x^* = \phi(x_n) - \phi(x^*) = D\phi(x^*)(x_n - x^*) + O(\|x_n - x^*\|^2),$$

d.h. es gibt für x_n nahe bei x^* ein $C > 0$ so dass

$$\|x_{n+1} - x^*\| \le \underbrace{\|D\phi(x^*)\| \, \|x_n - x^*\|}_{\le \vartheta_* \|x_n - x^*\|} + \underline{C\|x_n - x^*\|^2} \qquad (*)$$

$$\underbrace{C\|x_n - x^*\|}_{=\varepsilon} \, \|x_n - x^*\|$$

$= \varepsilon$ (nah genug an x^* kann beliebig klein werden)

Definiere $U \subseteq \Omega$ als

$$U := \{ x \in \Omega \mid C\|x - x^*\| < 1 - \vartheta_* \}$$

Dann sieht man gleich (mit (*)), dass $x_n \in U \Rightarrow x_{n+1} \in U$, und

$$\|x_n - x^*\| \le (\vartheta_* + \varepsilon)^n \|x_0 - x^*\| \longrightarrow 0$$

∎

1.10 Invariante Konvergenzbedingung

$A \in \mathbb{R}^{d \times d}$

Transformation: $\psi(y) = A^{-1}\phi(Ay)$ (z.B. Koordinatentransformation)

$$\left.\begin{aligned} y^* &= \psi(y^*) \\ y_{n+1} &= \psi(y_n) \\ y_n &\to y^* \end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned} x^* &= Ay^* \ \leadsto \ x^* = \phi(x^*) \\ x_n &= Ay_n \ \leadsto \ x_{n+1} = \phi(x_n) \\ & \qquad\qquad x_n \to x^* \end{aligned}\right.$$

$$\|D\psi(y^*)\| = \|A^{-1}D\phi(x^*)A\| \ne \|D\phi(x^*)\| \text{ i.A.}$$

Invariante Bedingung:

$$1 > \inf_{A \in GL_d(\mathbb{R})} \|A^{-1}D\phi(x^*)A\| = \rho(D\phi(x^*)) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ EW von } D\phi(x^*)\}$$

"Spektralradius"

1.10 Implementierung

```
while "noch nicht konvergiert"
      x_{n+1} = φ(x_n)
      if "kein Erfolg möglich"
            fail = true
            exit
      end
end
```

(a) Kein Erfolg möglich:

lokale Konvergenzrate $\underbrace{\frac{\|x_{k+1} - x_k\|}{\|x_k - x_{k-1}\|}}_{\vartheta_k} = \frac{\|\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})\|}{\|x_k - x_{k-1}\|} \approx \vartheta_*$ nahe x^*

Es sollte $\vartheta_k < 1$ gelten. Falls $\underline{\vartheta_k \geq 1}$, kein Erfolg möglich

(b) Noch nich konvergiert:

$\|x_k - x^*\| > TOL$ ← Benutzer-gegebene Fehlerschranke

Kriterium nicht implementierbar, da wir x^* nicht kennen

Theorie (1.8 & 1.9) liefert Abschätzung

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \frac{\vartheta_*}{1-\vartheta_*} \|x_{k+1} - x_k\|$$

⇝ wir realisieren Kriterium

$$\frac{\vartheta_*}{1-\vartheta_*} \|x_{k+1} - x_k\| > TOL$$

NB: ϑ ist i. A. nicht bekannt ⇒ schätzen aus (a)

1.11. FP-Iteration für lineare Gleichungssysteme

1.12 Konvergenzgeschwindigkeit

Def: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*$

Die Folge konvergiert linear mit Konvergenzrate $0 \leq \vartheta < 1$, falls

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \vartheta \, \|x_n - x^*\| \qquad \forall n \geq 0$$

Bem: (a) Fixpunktiteration konvergiert linear mit Rate $\vartheta = \vartheta_*$

(b) Pro Iterationsschritt ist ein Zuwachs an $-\log_{10} \vartheta_*$ korrekten Dezimalstellen zu erwarten

Bsp: $\vartheta = 1/2$ ⇒ 52 Iterationen bis zu Maschinengenauigkeit (double precision)