# Wiederholung

Fixpunktiteration

$$f(x^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(x^*) := f(x^*) + x^* = x^*$$

$$x_{n+1} := \Phi(x_n)$$

Banachscher Fixpunktsatz (global)

$\bar{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen

$\Phi : \bar{\Omega} \to \bar{\Omega}$ (Selbstabbildung)

$\exists\, 0 \le \vartheta < 1: \ \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \le \vartheta \|x - y\| \quad \forall x, y \in \bar{\Omega}$ (Kontraktion)

Dann: $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ konvergiert gegen $x^* = \Phi(x^*)$ $\forall x_0 \in \bar{\Omega}$

+ Fehlerschranken

Lokaler Konvergenzsatz:

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\cancel{\Phi : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^d \text{ mit } \Phi \in Z}$

$\Phi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ mit $\Phi(x^*) = x^*$, $x^* \in \Omega$

$\|D\Phi(x^*)\| =: \vartheta_* < 1$

Dann: $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ konvergiert gegen $x^* = \Phi(x^*)$ für $x_0$ hinreichend nahe an $x^*$

$(x_0 \in U := \{x \in \Omega \mid C\|x - x^*\| \le 1 - \vartheta_*\}$

nicht bekannt a-priori

Algorithmus: $\vartheta_k := \dfrac{\|x_{k+1} - x_k\|}{\|x_k - x_{k-1}\|}$

Stopp falls $\vartheta_k \ge 1$ (kein Erfolg möglich)

oder $\dfrac{\vartheta_k}{1 - \vartheta_k} \|x_{k+1} - x_k\| < Tol$ (Konvergenz)

---

1.11. Invariante Konvergenzbedingung

Transformation: $\Psi(y) = A^{-1}\Phi(Ay)$, $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $y := A^{-1}x$

$$\left.\begin{array}{l} y^* = \Psi(y^*) \\ y_{n+1} = \Psi(y_n) \\ y_n \to y^* \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x^* = \Phi(x^*), & x^* = Ay^* \\ x_{n+1} = \Phi(x_n), & x_n = Ay_n \\ x_n \to x^* & \end{array}\right.$$

i. A. $\|D\Psi(y^*)\| = \|A^{-1} D\Phi(x^*) A\| \ne \|D\Phi(x^*)\|$

Die beiden FP-Iterationen könnten unterschiedliche Konvergenzgeschwindigkeiten haben

## 1.~~11~~ 12 Konvergenzgeschwindigkeit

**Def:** Die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert linear gegen $x^*$ mit Konvergenzrate $0 \le \nu < 1$, falls

$$\|x_{n+1} - x^*\| \le \nu \|x_n - x^*\| \quad \forall n \ge 0$$

**Bem:** a) FP-Iteration konvergiert linear mit Rate $\nu = \nu_*$

b) Pro Iterationsschritt ist ein Zuwachs an $-\log_{10}\nu$ korrekten Dezimalstellen zu erwarten

Bsp: $\nu = 1/2 \Rightarrow$ 52 Iterationen bis Maschinengenauigkeit (double precision $\varepsilon_{mach} \approx (\frac{1}{2})^{52}$)

**Def:** Die Folge $\{x_n\}$ konvergiert gegen $x^*$ mit Konvergenzordnung $p$, falls es ein $C > 0$ gibt, ~~so~~ dass

$$\|x_{n+1} - x^*\| \le C \|x_n - x^*\|^p \quad \forall n \ge 0$$

**Bem:** ~~# korrekter Ziffern wächst pro Schritt um Faktor p~~

Zur Abschätzung der Konvergenzrate verwendet man häufig $\|x_{n+1} - x_n\| \le C \|x_n - x_{n-1}\|^p$

## 1.~~12~~ 11 Exkurs: FP-Iteration für lineare Probleme $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $b \in \mathbb{R}^d$

Warum: Gauß-Elimination ~~oft instabil~~ teuer (Aufwand $O(n^3)$) und oft instabil

Bsp: Diskretisierung partieller Differentialgleichungen (A sehr groß mit wenigen nicht-Null Einträgen)

$f(x) = b - Ax = 0$

FP-Iteration $\quad \phi(x) = b - Ax + x = x \quad$ (~~$\phi$ ist affin linear und somit lipschitz-stetig~~)

Problem: $\phi$ ist i.A. keine Kontraktion

Lösung: $\quad \phi(x) := x + B^{-1}(b - Ax) = (I - B^{-1}A)x + B^{-1}b$ für $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ regulär

$$(\phi(x^*) = x^* \Leftrightarrow Ax^* = b)$$

Dann gilt: $\|\phi(x) - \phi(y)\| = \|(I - B^{-1}A)(x-y)\| \le \underbrace{\|I - B^{-1}A\|}_{=:\nu} \|x-y\|$

Ziel: $\nu$ klein und $B^{-1}$ einfach auswertbar $\quad$ Für $\nu < 1$ konvergiert die Folge $\{x_n\}$ mit $x_{n+1} = \phi(x_n)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$

Wahl von B: (i) $B = A \Rightarrow \nu = 0$ ($x_1 = x^*\ \forall x_0$) bestmögl. Konvergenzrate, aber Auswertung von $B^{-1}$ (= $A^{-1}$) teuer

(ii) $B = \mathrm{diag}(A)$ Jacobi-Verfahren

(iii) $B_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & i \ge j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ Gauß-Seidel-Verfahren

(ii), (iii): langsam

(iv) Mehrgitterverfahren $\rightarrow$ Numerik 3

## I.3. Newton-Verfahren

ges: $x^*$ mit $f(x^*)=0$

**1.13. Grund-Idee:** Taylorentwicklung um $x^*$

$$0 = f(x^*) = f(x) + Df(x)(x^*-x) + \underbrace{O(\|x^*-x\|^2)}_{\text{wird vernachlässigt}}$$

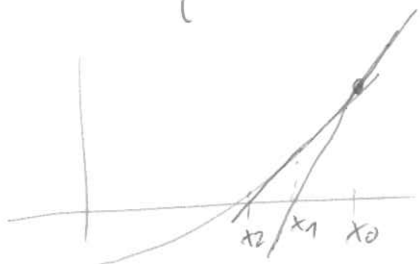
Falls $x = x_n$ ist, möchte man $x_{n+1} = x^*$

$$\Rightarrow \boxed{0 = f(x_n) + Df(x_n)(x_{n+1}-x_n)}$$

Umgeschrieben: Newton-Verfahren

$$\begin{cases} Df(x_n)\,\Delta x_n = -f(x_n) & \text{(LGS)} \\ x_{n+1} = x_n + \Delta x_n \end{cases}$$

1D:




Newton-Verfahren als FP-Iter.

$$x_{n+1} = \phi(x_n) := x_n - Df(x_n)^{-1} f(x_n)$$

**1.14. Quadratische Konvergenz**

Lemma: Sei $f \in C^3(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und $Df(x^*)$ invertierbar für alle $x^* \in \Omega$ mit $f(x^*)=0$. Dann ist $\phi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und $D\phi(x^*)=0$. Folglich konvergiert die Newton-Iteration quadratisch.

Beweis: $\phi(x) = x - \underbrace{[Df(x)]^{-1}}_{} f(x)$

differenzierbar in der Nähe von $x^*$ (Satz über implizite Fkt)

$$\Rightarrow D\phi(x) = I - D[[Df(x)]^{-1}]\, f(x) - [Df(x)]^{-1} Df(x)$$

$$= D[(Df(x))^{-1}]\, f(x)$$

$\cancel{x=x^*}$

$$\Rightarrow D\phi(x^*) = 0 \quad \text{da } f(x^*)=0$$

$$(1.9) \Rightarrow \|x_{n+1}-x_n\| \le \|D\phi(x^*)\|\,\|x_n-x^*\| + C\|x_n-x^*\|^2$$

$$= C\|x_n-x^*\|^2 \quad \text{für } x_n \text{ nahe } x^*$$

#

**1.15. Beispiel**

Berechnung von $\sqrt{a}$, $a>0$ als NST von $f(x) = x^2 - a = 0$

Newton: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - a}{2x_n} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$

1.~~17~~ Implementierung

while "noch zu nicht konvergiert"

$$Df(x_n)\,\Delta x_n = -f(x_n)$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n$$

if "kein Erfolg möglich"

fail = true

exit

end

end

Konvergenz: $\|x_n - x^*\| \le TOL$

$$\|x_n - x^*\| \le \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x^*\|$$
$$\le \|\Delta x_n\| + C\cdot\|x_n - x^*\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|x_n - x^*\|\left(1 - C\cdot\|x_n - x^*\|\right) \le |\Delta x_n|$$

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{\|\Delta x_n\|}{1 - C\|x_n - x^*\|} \approx \|\Delta x_n\|$$ in der Nähe von $x^*$

implementiere "noch nicht konvergiert" als

$$\|\Delta x_n\| > TOL$$

1.~~16~~ Affine Invarianz

$A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ regulär. Dann $f(x^*) = 0 \Leftrightarrow Af(x^*) = 0$ (affine Invarianz)

wird durch das Newton-Verfahren erhalten:

$$D[Af(\hat{x}_n)]\,\Delta\hat{x}_n = -Af(\hat{x}_n)$$

$$\Leftrightarrow A[Df(\hat{x}_n)]\,\Delta\hat{x}_n = -Af(\hat{x}_n)$$

$$\Leftrightarrow Df(\hat{x}_n)\,\Delta\hat{x}_n = -f(\hat{x}_n)$$

wenn $\hat{x}_n = x_n \Rightarrow \Delta\hat{x}_n = \Delta x_n$

Fazit: auch Konvergenzkriterien sollten affin-invariant formuliert werden

1.18. Natürlicher Monotonietest

1. Idee: Es sollte gelten $\|x_{n+1} - x^*\| \le \|x_n - x^*\|$ (aber $x^*$ unbekannt)

2. Idee: Linearisierung (in führender Ordnung)

$$f(x_{n+1}) = f(x_{n+1}) - f(x^*) \doteq Df(x^*)(x_{n+1} - x^*)$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - x^* \doteq Df(x^*)^{-1} f(x_{n+1})$$

$$x_n - x^* \doteq Df(x^*)^{-1} f(x_n)$$

Ersetze $Df(x^*)$ durch $Df(x_n)$:

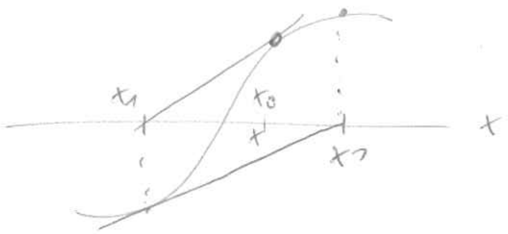
affin invariant! $\Leftarrow$ $$\underbrace{\|Df(x_n)^{-1} f(x_{n+1})\|}_{=:\overline{\Delta x_{n+1}}} \overset{1.\text{Idee}}{\le} \underbrace{\|Df(x_n)^{-1} f(x_n)\|}_{=-\Delta x_n}$$ natürl. Monotonietest

vereinfachte Newton-Korrektur ($Df(x_n)^{-1}$ aus Berechnung von $\Delta x_n$ wiederverwenden!)

"kein Erfolg zu erwarten": $\|\overline{\Delta x_{n+1}}\| > \|\Delta x_n\|$

.1. Gedämpfte Newton-Iteration

Problem: lokale Konvergenz kann scheitern, wenn Startwert nicht gut genug



Häufig: Richtung o.k. Länge problematisch

Idee: $x_{n+1} = x_n + \lambda \cdot \Delta x_n$, $\lambda \in [0,1]$ Dämpfung / Relaxation

Algorithmus: Starte mit $\lambda = 1$
- Falls natürlicher Monotonietest scheitert $\lambda \to \frac{\lambda}{2}$, wiederhole Schritt
- Falls Schritt erfolgreich $\lambda \to \min\{1, 2\lambda\}$

"Armijo-Strategie"

Bem: Es gibt a) noch andere Dämpfungsstrategien
b) andere Globalisierungsstrategien (trust region)