II. BESTAPPROXIMATION UND LINERE AUSGLEICHSPROBLEME

2.1 Das abstrakte Problem

<u>Gegeben</u>: $f \in V$ "Realität", "das echte Objekt"

$U \subseteq V$ Menge unserer Möglichkeiten
- * Max. Darstellungskapazität
- * Vereinfachende Modellierungsannahme

$\| \cdot \|$ Maß für Abweichung

<u>Gesucht</u>: $u \in U$: $\|u-f\| \leq \|v-f\| \quad \forall v \in U$

2.2 Beispiele

(a) <u>Ausgleichsproblem</u>: $m \in \mathbb{N}$ <u>Experimente</u>: $\overset{\text{Eingabe}}{t_i} \longrightarrow \overset{\text{Ausgabe}}{b_i}$ gegeben

Ziel: b für $t \neq t_i$ "vorhersagen"

dazu habe <u>Modell</u> $\varphi(t; \underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{Parameter}})$

Bsp: t : Höhe, in der Ball losgelassen wird
b : Zeit bis Aufprall
x_i : Luftdichte, -wiederstand, Ballgröße, -masse ...

↳ bestimme $x_1, \dots, x_n$ so dass

$$\varphi(t_i; x_1, \dots, x_n) \approx b_i \qquad i = 1, \dots, m$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =: \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} =: \underline{b} \in \mathbb{R}^m, \quad \underline{\varphi}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad \underline{\varphi}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \varphi(t_1; \underline{x}) \\ \vdots \\ \varphi(t_m; \underline{x}) \end{pmatrix}$$

<u>Löse</u> $\|\underline{b} - \underline{\varphi}(\underline{x})\| = \min!$

Für $\| \cdot \|_2$: Methode der kleinsten Fehlerquadrate

$f \in B(M, Y)$
Supremumsnorm
$\|f\|_\infty := \sup_{x \in M} \|f(x)\|_Y$

(b) Gegeben: $f \in C[a,b]$

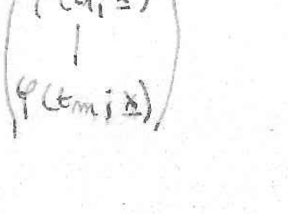
- Finde $u \in \mathcal{P}_n$ (Raum der Polynome Grades $\leq n$) mit $\|u-f\|_\infty = \min!$

$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$

"<u>Tschebyscheff-Approximation</u>"

<u>Bsp</u>: $f(x) = x^2$, $U = \mathcal{P}_0$, $[a,b] = [-1,1]$

$$\Rightarrow u_\infty \equiv 1/2$$



- L^2-Norm: $\|u\|_2^2 := \int_a^b |u(x)|^2 dx$

↝ "<u>L^2-Approximation</u>" $\xRightarrow[\|u-f\|_2 = \min!]{u \in \mathcal{P}_0} u_2 \equiv 1/3 \neq u_\infty$

• Einfache Funktionen: z.B. stückw. lineare

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$$

$$\mathcal{U} = S_m := \{ v \in C[a,b] \mid v|_{[x_{i-1},x_i]} \text{ linear}, \ i = 1,\dots,m\}$$ "lineare finite Elemente"

<u>NB</u>: Die Lösung von $\|f - \underset{\in S_m}{u_m}\|_2 = \min!$ ist i.A. nicht die stw. lineare Interpolante!

2.3 Existenz & Eindeutigkeit

Wahl von $\mathcal{U}, \|\cdot\|$?

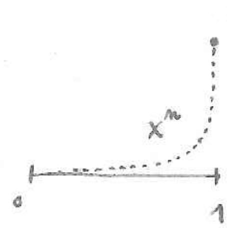
<u>Bsp</u>: $\mathcal{U} = \{ v \in C[0,1] \mid v(1) = 1 \} \subset C[0,1] =: V$

$f \equiv 0$

• $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2 \Rightarrow$ Sei $u_n(x) := x^n$, $\|u_n - f\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

aber "$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$" $\notin \mathcal{U}$

da u_∞ unstetig bei 1



kein Existenz vom Minimierer (Abgeschlossenheit)

• $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty \Rightarrow \forall u \in \mathcal{U}$ mit $\|u\|_\infty \le 1$ erfüllt

$$\|u - f\|_\infty = 1 = \min_{v \in \mathcal{U}} \|v - f\|, \text{ da } v(1) = 1, \ f(1) = 0$$

$$\| \, = |\underbrace{u(1)}_{1} - \underbrace{f(1)}_{0}|$$

Eindeutigkeit ↯

II.1 BESTAPPROXIMATION IN NORMIERTEN RÄUMEN UND PRÄHILBERTRÄUMEN

2.4 Existenz

Ab jetzt: • $(V, \|\cdot\|)$ normierter $\overbrace{\text{linearer Raum}}^{=\text{ Vektorraum}}$

• $U \subset V$ endlichdim. Unterraum (nicht erfüllt in 2.3 a)

<u>Satz</u>: Zu jedem $f \in V$ existiert eine Lösung von 2.1 [Skript (2.4)]

<u>Beweis</u>: Sei $g: U \to \mathbb{R}$, $g(v) = \|v - f\|$. Aus Δ-Ungl

$$|g(v) - g(w)| = \big|\|v - f\| - \|w - f\|\big| \le \|v - w\| \quad \forall v, w \in U$$ (Lipschitz)

$\Rightarrow g$ stetig.

Sei $B = \{ v \in U \mid \|v\| \le 2\|f\| \}$. Falls $v \notin B$, also $\|v\| > 2\|f\|$, dann

$$g(v) = \|v - f\| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\ge} \|v\| - \|f\| > \|f\| = g(0)$$ $0 \in U$

$\Rightarrow$ Außerhalb von B kann kein Minimierer liegen — da wir somit ein Element $u \in U$ finden (nämlich 0) mit $\|u - f\| < \|v - f\|$

• $\inf\limits_{v \in B} (g(v)) \ge 0$

• B ist abg., beschränkt, endlichdim $\Rightarrow$ kompakt

} Stetige Fkt g nimmt auf B Minimum an ∎

Eindeutigkeit

Eigenschaft von V und $\|\cdot\|$

Satz: Ist der Raum $(V, \|\cdot\|)$ strikt konvex, d.h.
[Skript S.2.2]

$$\frac{1}{2}\|v+w\| < 1 \quad \forall\, v,w \text{ mit } v \neq w \text{ und } \|v\| = \|w\| = 1,$$

so ist die Approximationsaufg. 2.1 [Skript (2.4)] für jedes $f \in V$ eind. lösbar.

Beweis: Seien $u_1 \neq u_2$ Lösungen, d.h. $\|u_1 - f\| = \|u_2 - f\| =: \gamma$.

$\gamma = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$, sei also $\gamma \neq 0$.

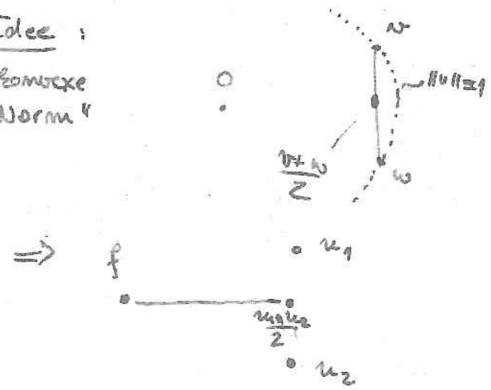
Mit $v := \frac{1}{\gamma}(u_1 - f) \neq \frac{1}{\gamma}(u_2 - f) =: w$ folgt
$\|v\| = \|w\| = 1$, $\frac{1}{2}\|v+w\| = \frac{1}{2\gamma}\|\gamma v + \gamma w\| < 1$

$$\rightarrow \frac{1}{2\gamma}\|u_1 - f + u_2 - f\| < 1$$

Sei $u^* = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$, so

$$\|u^* - f\| = \frac{1}{2}\|u_1 - f + u_2 - f\| < \gamma = \|u_1 - f\| \quad \text{↯}$$

Idee: „konvexe Norm"



2.6 Prähilbertraum

Ein normierter Raum kann von einem Prähilbertraum über die Skalarproduktnorm abgeleitet werden

Def [2.3 aus Skript]

reeller linearer Raum / reeller Vektorraum

Sei V ein $\mathbb{R}$-VR. Eine Abbildung $(\cdot,\cdot): V \times V \to \mathbb{R}$ heißt Skalarprodukt auf V, falls für alle $u, v, w \in V$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

$(u,v) = (v,u)$ — Symmetrie

$(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u,w) + \beta(v,w)$ — Linearität

$(v,v) \geq 0$, und $(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$ — Positiv-Definitheit

~~heißt~~ Versehen mit der Norm

$$\|v\| := \sqrt{(v,v)}$$

heißt V ein Prähilbertraum.

Bsp: (a) $V = \mathbb{R}^n$, $(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Dann ist $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$

(b) $C[a,b]$ mit L^2-Skalarprodukt

$$(u,v) = \int_a^b u(x)v(x)\,dx$$

Bem: Falls $(V, \|\cdot\|)$ vollständig, dann heißt es Hilbertraum.
→ Grenzwert einer konvergenten Folge liegt wieder in der Menge V
(a) ist ein HR, (b) nicht (vgl 2.3)