Falls $\|\cdot\|$ von Skalarprodukt induziert $\Rightarrow (V,\|\cdot\|)$ Prähilbertraum

2.5.18

2.7 Bestapproximation in Prähilberträumen

Wiederholung: Bestapproximationsproblem
$f \in V$, ges: $u \in U$ so dass $\|u-f\| \leq \|v-f\| \; \forall v \in U$
Existenz: falls $(V,\|\cdot\|)$ normierter Raum und $U \subset V$ endlichdim. UR
Eindeutigkeit: $(V,\|\cdot\|)$ strikt konvex

Satz: Ein Prähilbertraum ist strikt konvex.

Beweis: Übung

Satz: Im Prähilbertraum existiert eine eindeutige Lösung u von 2.1 [Skript 2.4]

Beweis: Satz oben + 2.5 [Skript S. 2.2] + 2.4 [Skript S. 2.1] ∎
Eindeutigkeit Existenz

2.8 Normalengleichung

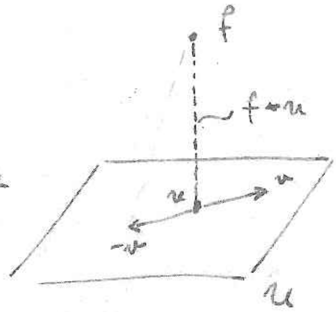
Skalarprodukt $\rightsquigarrow$ "Geometrie"

$\Rightarrow$ Variationsformulierung des Approximationsproblems

Satz: Sei V ein PHR (Prähilbertraum). Dann ist das Bestapproximationsproblem äquivalent zur Normalengleichung
$\|u-f\| \leq \|v-f\| \Leftrightarrow$

$$u \in U: \quad (u-f, v) = 0 \quad \forall v \in U \qquad (u-f) \perp U$$

Beweis:
insbesondere $(u-f, v-u) = 0$



"$\Rightarrow$": Sei u Lösung von 2.1, und $v \in U$, t beliebig.
Da u optimal:

$$\|u-f\|^2 \leq \|u-f+tv\|^2 = \|u-f\|^2 + 2t(v,u-f) + t^2\|v\|^2$$

$$\Rightarrow \quad 2t(v,u-f) + t^2\|v\|^2 \geq 0 \quad \forall t$$

$2(v,u-f) + t\|v\|^2 \geq 0 \quad \forall t$

$$\left.\begin{aligned} t>0 &\overset{t\to 0}{\Rightarrow} (v,u-f) \geq 0 \\ t<0 &\overset{t\to 0}{\Rightarrow} (v,u-f) \leq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (v,u-f) = 0$$

"$\Leftarrow$": Wähle $v \in U$ beliebig aber fest. Da u die Normalengl. löst,

$$\|u+v-f\|^2 = \|u-f\|^2 + 2\underbrace{(v,u-f)}_{=0} + \underbrace{\|v\|^2}_{\geq 0} \geq \|u-f\|^2$$

Damit ist u Lösung von 2.1. ∎

$\|v-f\|^2 = \|v-u+u-f\|^2 = \underbrace{\|v-u\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{2(v-u,u-f)}_{=0 \text{, da } v-u \in U} + \|u-f\|^2 \geq \|u-f\|^2$

2.9 Projektion

Aus der Normalengleichung: u ist Projektion von f auf U.

Def:
- Sei V ein normierter Raum und $P: V \to V$ eine lineare Abbildung mit $P^2 = P$.
  Dann heißt P Projektion.
- Sei V PHR, P Projektion mit $(v, (I-P)f) = 0 \; \forall f \in V \; \forall v \in R(P) = \{Pw \mid w \in V\}$ "Range"
  Dann heißt P Orthogonalprojektion auf $R(P)$.

Bem.:

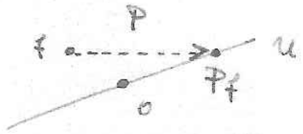
- V PHR. Nach 2.7 [Skript § 2.5] existiert zu jedem $f \in V$ eine eindeutige Bestapprox. $u \in U$. Durch
$$f \longmapsto u =: Pf \in U$$
ist eine Orthogonalprojektion definiert.

- V PHR, $P: V \to \underset{(R(P))}{U}$ Orthogonalprojektion. Dann ist $u = Pf$ ~~ist~~ die Bestapprox. von f auf U.

Eigenschaft von Projektionen. Wdh.: $\|P\| := \sup_{v \neq 0} \frac{\|Pv\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|=1} \|Pv\|$

Satz [Skript S. 2.9]

(a) Sei V ein norm. Raum, und $P \neq 0$ eine Projektion. Dann gilt $\|P\| \geq 1$ Bew: $\|P\| = \|P^2\| \leq \|P\|^2$



$\|P\| \geq 1$, da $Pv = v$ für $v \in R(P)$

(b) Sei V ein PHR, $P \neq 0$ eine Projektion. Dann
$$P \text{ Orthogonalproj} \iff \|P\| = 1$$
Beweis: s. Skript

Jetzt: Herleitung einer Berechnungsvorschrift für u

2.10 Basisdarstellung

Wie berechnet man eine Bestapprox.?

$\rightarrow$ sei $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ Basis von U, benutze Darstellung $u = \sum_{j=1}^{m} u_j \varphi_j$

$(u - f, v) = 0 \Rightarrow (u, v) = (f, v) \quad \forall v \in U$

unbekannte Koeffizienten

$\rightarrow$ Normalengleichung mit $v = \varphi_i$, $i = 1, \dots, m$

$$(u, \varphi_i) = \sum_{j=1}^{m} (\varphi_j, \varphi_i) u_j = (f, \varphi_i) \qquad i = 1, \dots, m$$

$$\left.\begin{array}{ll} A = (a_{ij})_{ij=1}^{m} \in \mathbb{R}^{m \times m}, & a_{ij} = (\varphi_j, \varphi_i) = (\varphi_i, \varphi_j) \\ \underline{b} = (b_i)_{i=1}^{m} \in \mathbb{R}^m, & b_i = (f, \varphi_i) \\ \underline{u} = (u_j)_{j=1}^{m} \in \mathbb{R}^m, & \end{array}\right\} \iff A\underline{u} = \underline{b}$$

$\uparrow$ Gramsche Matrix (symmetrisch, weil $(\cdot,\cdot)$ symm.)

A ist positiv definit (Übung)

Orthogonalbasis: $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ für $i \neq j$

Falls $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ Orthogonalbasis $\Rightarrow$ A diagonal $\Rightarrow$ Lösen von $A\underline{u} = \underline{b}$ einfach

II.2 APPROXIMATION STETIGER FUNKTIONEN

2.11 Tschebyscheff-Polynome 1. Art

$$T_m(x) = \cos(m \arccos(x)), \quad m = 0, 1, \ldots \qquad (-1 \le x \le 1)$$

- T_m ist Polynom des Grades m
- $\{T_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ erfüllt 3-Term-Rekursion

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

$$T_{m+1}(x) = 2x\, T_m(x) - T_{m-1}(x), \quad m = 1, 2, \ldots$$

<u>Beweisidee</u>: Benutze trigon. Additionsformel für T_{m+1} und T_{m-1}, und addiere um sin-Terme loszuwerden

- $\|T_m\|_\infty \le 1$ auf $[-1,1]$
- T_m bilden OGB (Orthogonalbasis) bzgl. $(u,v) := \int_{-1}^{1} u(x)\, v(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

2.12 Tschebyscheff-Approximation durch Polynome

$V = C[a,b]$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$, $\mathcal{U} = \mathcal{P}_m$

$\rightsquigarrow$ finde $p \in \mathcal{P}_m$: $\|p - f\|_\infty \le \|q - f\|_\infty \quad \forall q \in \mathcal{P}_m \qquad (*)$

$C[a,b]$ mit $\|\cdot\|_\infty$ <u>nicht</u> strikt konvex, trotzdem:

<u>Satz</u>: Die Lösung von $(*)$ ist eindeutig bestimmt.

[Skript Satz 2.12]

<u>Beispiel</u>:

Sei: $V = C[-1,1]$, $f(x) = x^{m+1}$

$(*) \iff$ finde $p \in \mathcal{P}_m$ mit $\|x^{m+1} - p\|_\infty$ minimal

Theorie: $p^* = \frac{1}{2^m} T_{m+1} - x^{n+1}$ ist Optimallösung (vgl. [Hämmerlin & Hoffman, 1994, Kap. 4])

2.13 L^2-Approximation mit Polynomen

$V = C[a,b]$, $(u,v) = \int_a^b u(x)\, v(x)\, dx$, $\mathcal{U} = \mathcal{P}_m$

Zugehörige Bestapprox.-aufgabe eindeutig lösbar, Lsg charakterisiert durch die Normalengleichung:

$$(p - f, q) = 0$$

$$p \in \mathcal{P}_m: \quad (p,q) = (f,q) \quad \forall q \in \mathcal{P}_m$$

Berechnung $\rightsquigarrow$ Basis

- <u>Naheliegende Wahl</u>: Monome $\varphi_i(x) = x^i$

  Auf $C[0,1]$ führt dies auf Gramsche Matrix $A = (a_{ij})$

$$a_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^1 x^{i+j}\, dx = \frac{1}{i+j+1} \rightsquigarrow \text{Hilbert-Matrix}$$

(schnell schlecht konditioniert $\kappa(H_{12}) \approx 10^{16}$)

- Kluge Wahl: Orthogonalbasis

  z.B. Legendre-Polynome $\psi_i(x) = \frac{1}{2^i i!} \frac{d^i}{dx^i} (x^2-1)^i$, $i = 0,1,\dots$

  bilden OGB von $C[-1,1]$

  (wie kommt man auf $C[0,1]$, oder $C[a,b]$ allg? → Übung?

  Antwort: benutze Affintransformation von $[a,b] \to [-1,1]$

  → affin wichtig, sonst Gewicht verzerrt!)

Orthogonalität ⟹ Gramsche Matrix A diagonal

Beispiel ⇝ Übung

Solch' globale Polynome sind ungeeignet für komplizierte Geometrien ($d \geq 2$)