7.05.18

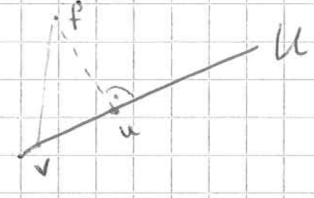
Wiederholung

a) Bestapproximation in PHR

$$\|u-f\| \leq \|v-f\| \;,\; u \in U \subset V \;,\; \forall v \in U$$

$$\iff (u-f, v) = 0$$

$$\iff u-f \perp U$$



$u := Pf$, u ist die Orthogonalprojektion von f auf U

Berechnung über Basisdarstellung $U = \operatorname{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$

$$\langle u, v\rangle = \langle f, v\rangle \qquad \forall v \in U$$

$$\iff \quad Au = b \quad \text{mit} \quad u = \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i \;,\; A_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)$$

$$b_i = (f, \varphi_i)$$

b) Approximation stetiger Funktionen

$V = C([a,b])$, $U = \mathcal{P}_n$

$\|p - f\| \leq \|q - f\| \quad \forall q \in \mathcal{P}_n$

- $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^{n+1} \\ a = -1, b = 1 \\ \|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty \end{array}\right\} \quad p^* = x^{n+1} - \frac{1}{2^n} T_{n+1}$

- $a = 0$, $b = 1$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$

  Basisdarstellung von U - Monome $\varphi_i(x) = x^i$

  $\Rightarrow$ A ist Hilbertmatrix

  - Legendre - Polynome (OGB)

  ungeeignet für komplexe Geometrien ($d \geq 2$)

2.14 Lineare finite Elemente

Gitter $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$S_n = \{\varphi \in C([x_0, x_n]) : \varphi|_{[x_i, x_{i+1}]} \text{ linear } \forall i = 0, \dots, n-1\}$

Basis von S_n : Knotenbasis $\varphi_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & , i = k \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$

bestimmt φ_i eindeutig

$$\Rightarrow \quad \varphi_i(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{h_i}(x - x_i) & , x \in [x_{i-1}, x_i] \;,\; i = 1, \dots, n \\ 1 - \frac{1}{h_{i+1}}(x - x_i) & , x \in [x_i, x_{i+1}] \;,\; i = 0, \dots, n-1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Hütchenfunktionen

mit $h_i = x_i - x_{i-1}$

$$\|\cdot\| = \|\cdot\|_2 = \int_a^b u(x)\, v(x)\, dx$$

Eigenschaften:

- $u \in S_n$: $u(x) = \sum_{i=0}^{n} u_i \varphi_i(x)$, $u_i = u(x_i)$
- lokaler Träger $\Rightarrow (\varphi_i, \varphi_j) = 0 \quad \forall\, |i-j| \geq 2$

$\Rightarrow (\varphi_i, \varphi_j) \neq 0$ nur für $|i-j| \leq 1$

$\Rightarrow$ Gramsche Matrix M ist tridiagonal

$$M\underline{u} = \underline{b}$$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & 0 \\ \mu_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \lambda_{n-1} \\ 0 & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \qquad \mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} \qquad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$$

$$M_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j) \cdot \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \quad , \quad b_i = (f, \varphi_i) \cdot \frac{6}{h_i + h_{i+1}}$$

Zeilenskalierung für bessere Darstellbarkeit

Satz: $\kappa_\infty(M) = \|M\|_\infty \cdot \|M^{-1}\|_\infty \leq 3$

Beweis: $|\mu_i| + |\lambda_i| = \mu_i + \lambda_i = 1 \quad \forall i$

$$\|M\|_\infty = \max_{i=0,\dots,n} \sum_{j=0}^{n} |m_{ij}| = \max_i \left(2 + \mu_i + \lambda_i\right) = 3$$

M^{-1} ist unbekannt, daher wähle $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ beliebig, aber fest

$$(Mz)_i = \mu_i \cdot z_{i-1} + 2 z_i + \lambda_i z_{i+1} \qquad (\text{mit } \mu_0 = 0 \,,\, \lambda_n = 0)$$

$$\Rightarrow \quad 2|z_i| \leq \max_{j=0,\dots,n} |(Mz)_j| + \underbrace{(\mu_i + \lambda_i)}_{=1} \cdot \max_{j=0,\dots,n} |z_j| \qquad \forall i$$

$$\Leftrightarrow \quad |z_i| \leq \frac{1}{2} \cdot \|Mz\|_\infty + \frac{1}{2}\|z\|_\infty \qquad \forall i$$

$$\Rightarrow \quad \|z\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|Mz\|_\infty + \frac{1}{2}\|z\|_\infty \quad \Rightarrow \quad \|z\|_\infty \leq \|Mz\|_\infty$$

7.05.18

$y := M \cdot z$

$\Rightarrow \quad \|M^{-1} y\|_\infty \leq \|y\|_\infty$

$$\Rightarrow \quad \|M^{-1}\|_\infty = \max_{\substack{y \in \mathbb{R}^{n+1} \\ y \neq 0}} \frac{\|M^{-1} y\|_\infty}{\|y\|_\infty} \leq 1 \qquad \square$$

D.h. das lin. Gleichungssystem ist gut konditioniert (unabhängig von n!).

II.3 Methode der kleinsten Quadrate (Ausgleichsprobleme)

2.15 Parameteridentifikation

- m Messpunkte (t_i, b_i), $i = 1, \dots, m$
- Modell $b(t) = \varphi(t, x_1, \dots, x_n)$
- Messfehler $b_i = \varphi(t_i, x_1, \dots, x_n) + r_i$

  $\uparrow$ unbekannt & zufällig
  - unabhängig
  - identisch verteilt & normalverteilt

$\Rightarrow$ Maximum-Likelihood-Schätzung:

Bestimme $x_1, \dots, x_n$ so, dass $\sum_{i=1}^{m} r_i^2 = \min!$

2.16 Lineare Modelle

$$\varphi(t, x_1, \dots, x_n) = a_1(t) x_1 + a_2(t) x_2 + \dots + a_n(t) x_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \min! \iff \sum_{i=1}^{m} \left[b_i - \varphi(t_i, x_1, \dots, x_n)\right]^2 = \min!$$

$$\iff \|b - Ax\|_2^2 = \min! \iff Ax \approx b \quad \text{mit } A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1(t_1) & \cdots & a_n(t_1) \\ \vdots & & \vdots \\ a_1(t_m) & \cdots & a_n(t_m) \end{pmatrix}}_{\text{Modellmatrix}}$$

In der Praxis ist häufig $m >> n$.

Definition: Lineares Ausgleichsproblem

Gegeben $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$.

Gesucht $x \in \mathbb{R}^n$, sodass $\|Ax - b\|_2^2 = \min!$

bzw. $\|Ax - b\|_2 \leq \|Av - b\|_2 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

Bemerkungen:

a) andere Normen: ℓ_1 - Ausgleich $\|Ax-b\|_1 = \min$ } nicht differenzierbar!

ℓ_∞ - Ausgleich $\|Ax-b\|_\infty = \min$

b) Bestapproximation:

$U := R(A)$, gesucht $u \in U$, sodass $\|u-b\|_2 \leq \|v-b\|_2 \quad \forall v \in U$

c) Hat A vollen Spaltenrang, dann existiert ein eindeutiges x mit $Ax = u$.

2.17 Regressionsgerade (siehe Skript)

2.18 Normalengleichung "revisited"

Satz: Sei $m \geq n$. Dann ist $x \in \mathbb{R}^n$ genau dann Lösung des Ausgleichsproblems, wenn x der Normalengleichung

$$A^T A x = A^T b$$ genügt.

Ist A injektiv (voller Spaltenrang), so ist x eindeutig bestimmt.

Beweis: x löst das Ausgleichsproblem. — Normalengleichung mit $u := Ax$, $f := b$ — 2.8

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (Ax-b, v) = 0 && \forall v \in R(A) \\
&\Leftrightarrow (Ax, v) = (b, v) && \forall v \in R(A) \\
&\Leftrightarrow (Ax, Ay) = (b, Ay) && \forall y \in \mathbb{R}^n \\
&\Leftrightarrow (A^T A x, y) = (A^T b, y) && \forall y \in \mathbb{R}^n \\
&\Leftrightarrow A^T A x = A^T b
\end{aligned}$$

Falls A injektiv ist, dann ist $A^T A$ regulär und

$x = (A^T A)^{-1} A^T b$ ist eindeutig. $\square$

2.19 Konditionsanalyse

Möglicher Algorithmus: $\underset{\text{input}}{(b, A)} \longmapsto (A^T A, A^T b) \overset{(*)\text{ löse}}{\longmapsto} A^T A x = A^T b$

↑ LR-Zerlegung oder Cholesky

Kondition von $(*)$ (für festes b):

$$\kappa_2(A^T A) = \|A^T A\|_2 \, \|(A^T A)^{-1}\|_2 \underset{\text{falls } n=m}{=} [\kappa_2(A)]^2$$

7.05.18

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \Rightarrow A^TA = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon^2 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon^2 \end{pmatrix}$

für $\varepsilon < \sqrt{\varepsilon_{machine}}$ ist A^TA singulär
(Normalengleichung nicht mehr lösbar)