9.05.18

Tschebyscheff-Approximation (Korrektur)

$V = C([-1,1])$, $f(x) = x^{n+1}$, $\|\cdot\|_\infty$, $U = \mathcal{P}_n$

$\|\underbrace{x^{n+1} - p}_{=:\omega}\|_\infty \leq \|\underbrace{x^{n+1} - r}_{=:q}\|_\infty \quad \forall r \in \mathcal{P}_n$, $\omega, q \in \mathcal{P}_{n+1}^{(1)}$

$\omega^* = \frac{1}{2^n} T_{n+1}$

$\Longrightarrow \quad p^* = x^{n+1} - \omega^* = x^{n+1} - \frac{1}{2^n} T_{n+1}$

Wiederholung

Methode der kleinsten Quadrate zur Lösung linearer Ausgleichsprobleme

$$(*) \quad \|Ax - b\|_1 = \min_x ! \quad , A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, m \geq n$$

x minimiert $(*)$ $\Longleftrightarrow$ x löst $A^T A x = A^T b$ (Normalengleichung)

Das LGS ist oft schlecht konditioniert.

2.20 QR-Zerlegung einer rechteckigen Matrix

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, $\operatorname{rank}(A) = n$ (voller Spaltenrang!)

gesucht ist die Zerlegung $A = Q \cdot \tilde{R}$ mit $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ orthogonal ($Q^T Q = Q Q^T = \mathbb{1}$), $\tilde{R} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \\ n \end{array} \begin{array}{l} n \\ m-n \end{array}$, $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obere Dreiecksmatrix

(volle QR-Zerlegung)

Mit $Q = \left(Q_{:,1:n} \,\middle|\, Q_{:,n+1:m} \right)$: $A = Q_{:,1:n} R$ (reduzierte QR-Zerlegung)

2.21 Lösung des Ausgleichsproblems (Golub 1965)

$\|Ax - b\|_2^2 = \|Q^T A x - Q^T b\|_2^2 \qquad \left[\|Qx\|_2 = x^T Q^T Q x = \|x\|_2 \right]$

Sei $A = QR$

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|Q^T A x - Q^T b\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} x - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\|_2^2, \text{ wobei } Q^T b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

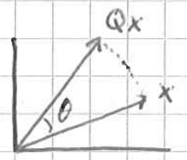
$$= \|Rx - b_1\|_2^2 + \|b_2\|_2^2 \text{ wird minimal} \qquad b_1 \in \mathbb{R}^n, b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$$

$\Longleftrightarrow \quad x = R^{-1} b_1$

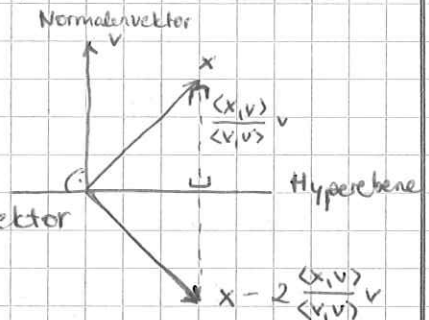
Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, $\operatorname{rank}(A) = n$ und $A = Q\tilde{R}$ die QR-Zerlegung von A.
Dann ist $x = R^{-1} b_1$ mit $Q^T b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ die Lösung von $\|Ax - b\|_2^2 = \min_x !$ mit $\|Ax - b\|_2^2 = \|b_2\|_2^2$

Frage: Existenz und Konstruktion der QR-Zerlegung?

2.22 Drehungen & Spiegelungen



- Drehung im $\mathbb{R}^2$: $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$



- Spiegelung / Reflexion an Hyperebene

$$Qx = x - 2\frac{\langle x,v \rangle}{\langle v,v \rangle} v \quad , v \text{ Normalenvektor}$$

2.23 Givens-Rotationen

Ziel: wollen Nulleinträge in den unteren Zeilen von A erzeugen und zwar durch Rotation

- Sei $a \in \mathbb{R}^2$ mit $\|a\|_2 = r$ und nach $\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ rotiert werden.
  Mit $c := \cos\theta$, $s = \sin\theta$: $\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$, $r = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

  $\Rightarrow \quad c = \frac{a_1}{r}$, $s = \frac{a_2}{r}$ „Givens-Rotationen"

- $a \in \mathbb{R}^m$ ~~soll nach~~, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_l \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ soll rotiert werden nach $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{l-1} \\ r \\ a_{l+1} \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ 0 \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$

$\left(r = \sqrt{a_l^2 + a_k^2} \right)$

$$\Rightarrow Q = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} Id & & & & \\ & c & & s & \\ & & Id & & \\ & -s & & c & \\ & & & & Id \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{Zeile } l \\ \\ \leftarrow \text{Zeile } k \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{Spalte } l & \text{Spalte } k \end{array} \end{array}$$

9.05.18

- QR-Zerlegung mit Givens-Rotationen

$$A = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & & & \\ * & & & \\ \vdots & & & \\ \boxed{*} & & & \\ \boxed{*} & \cdots & & * \end{pmatrix} \xrightarrow{Q_1} \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & & & \\ \vdots & & & \\ \boxed{*} & & & \\ \boxed{0} & \cdots & & * \end{pmatrix} \xrightarrow{Q_2} \begin{pmatrix} * & \cdots & & * \\ * & & & \\ \vdots & & & \\ \boxed{*} & & & \\ \boxed{0} & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Q_{m-1}} \begin{pmatrix} * & \cdots & & * \\ 0 & * & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \boxed{*} & & \\ 0 & \boxed{*} & \cdots & * \end{pmatrix} \xrightarrow{Q_m} \cdots \xrightarrow{Q_s} \begin{pmatrix} * & \cdots & & * \\ 0 & \ddots & & * \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Schließlich $Q_s Q_{s-1} \cdots Q_1 A = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$

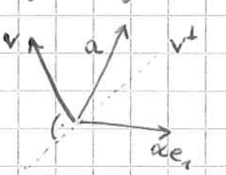
Wir haben konstruktiv gezeigt, dass jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Zerlegung der Form $A = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$ besitzt.

Bemerkung: Falls $\operatorname{rank}(A) < n$, dann R singulär.

Aufwand: $\sim n \cdot m$ Wurzeln und $\sim 2 m \cdot n^2$ Multiplikationen

2.24 Householder-Reflexionen

Gegeben $a \in \mathbb{R}^m$, finde $v \in \mathbb{R}^m$, sodass die Spiegelung von a an $v^\perp$ ein Vielfaches von $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt.



Länge von v spielt keine Rolle.

$$Qa = a - 2 \frac{\langle v, a \rangle}{\langle v, v \rangle} v = \alpha \cdot e_1$$

- Längenerhaltung (da Q orthogonal):

$$\|Qa\|_2 = \|a\|_2 = \|\alpha e_1\|_2 = \alpha$$

- v und $a - \alpha e_1$ sind linear abhängig
- setze $v = a - \|a\|_2 e_1$

2.25 QR-Zerlegung mit Householder

Setze Spalte für Spalte die Subdiagonalelemente von A auf 0.

Starte mit $A = \begin{pmatrix} | & \\ a_1 & * \\ | & \end{pmatrix}$ $\quad a_1$: 1. Spalte

$$Q_1 \cdot A = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array} \right) \begin{array}{l} \}\, 1 \\ \}\, m-1 \end{array}$$

Weiter mit gleichem Schritt für $A^{(1)} = \begin{pmatrix} | & \\ a_2 & * \\ | & \end{pmatrix}$

$$\tilde{Q}_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & * \\ 0 & \\ \vdots & A^{(2)} \\ 0 & \end{pmatrix} \rightarrow Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \tilde{Q}_2 \\ 0 & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

u.s.w.

Schließlich: $\underbrace{Q_s Q_{s-1} \cdots Q_1}_{Q^T} A = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$

Aufwand: $\sim 2mn^2$ Multiplikationen

Bemerkung: Givens vs. Householder
- Matlab benutzt Householder
- Givens besonders effizient, wenn nur wenige Elemente zu eliminieren sind, z.B. Hessenbergmatrix $\begin{bmatrix} * & & & \\ * & * & & \\ & * & * & \\ 0 & & * & * \\ & & & * \; * \end{bmatrix}$

2.26 Modifiziertes Gram-Schmidt-Verfahren

- bisher: Q "multiplikativ" aus Faktoren aufgebaut
- jetzt: Spalte für Spalte aufbauen

$A_1 = A$

Für $k = 1, 2, \dots, n$ partitioniere

$$A_k = (b_k \mid B_k) = Q_k \cdot R_k \quad \text{mit} \quad Q_k = (q_k \mid Q_{k+1})$$

$$R_k = \left(\begin{array}{c|c} \rho_k & r_k^T \\ \hline 0 & R_{k+1} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \quad b_k = \rho_k \cdot q_k \xRightarrow{\|q_k\|_2 = 1} \rho_k = \|b_k\|_2, \; q_k = \frac{b_k}{\|b_k\|_2}$$

$$B_k = q_k r_k^T + \underbrace{Q_{k+1} R_{k+1}}_{=: A_{k+1}}$$

$$\xRightarrow{q_k \perp Q_{k+1}} \quad q_k^T B_k = \underbrace{q_k^T q_k}_{=1} r_k^T + 0$$

$$\Rightarrow \quad r_k^T = q_k^T B_k$$

Bemerkung: MGS berechnet die reduzierte QR-Zerlegung.