14.05.18

III Interpolation

3.1 Aufgabenstellung

$f \in C([a,b])$ gegeben $\rightarrow$ approximiere f mit "einfachen" Funktionen, z.B. Polynome, stückweise Polynome

$\rightarrow$ "gute" Approximation nicht häufig aus, falls Bestapproximation zu aufwendig ist

Vorliegende Information:

$$\underbrace{f(x_k)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Stützstellen} \\ \text{in } [a,b]}} = \underbrace{f_k}_{\substack{\uparrow \\ \text{Stützwerte}}} \quad , k = 0, \dots, n$$

Ziel: Finde $u_n \in U_n$ mit $u(x_k) = f_k \quad \forall k$

Approximationsgüte gemessen mit $\|f - u_n\|_\infty = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - u_k(x)|$

Wunsch: $\|f - u_n\|_\infty \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, möglichst schnell:

$$\|f - u_n\|_\infty \leq C \cdot n^{-q} \quad , q > 0 \text{ groß}$$

III.1 Polynominterpolation

3.2 Vorwissen

$$U_n = \mathcal{P}_n = \{ v \in C([a,b]) \mid v \text{ ist Polynom vom Grad} \leq n \}$$

Finde $p_n \in \mathcal{P}_n$ mit $p_n(x_k) = f(x_k) \quad \forall k = 0, \dots, n \quad (*)$

Bemerkung: Wird p_n außerhalb von $[a,b]$ ausgewertet, spricht man von Extrapolation.

Wir wissen aus CoMa II:

Satz: (a) Die Aufgabe $(*)$ hat eine eindeutige Lösung p_n

(b) p_n ist gegeben durch die Lagrange-Darstellung:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot L_k(x)$$

mit den Lagrange-Polynomen zu den Stützstellen

$$x_0, \dots, x_n: \quad L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad , k = 0, \dots, n$$

(c) Newton'sche Darstellung: $p_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \underbrace{f(x_0, \dots, x_k)}_{\text{dividierte Differenzen}} \prod\limits_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$

Die dividierten Differenzen erfüllen

$$f[x_i] = x_i \quad , \; i=0,\dots,n$$

$$f[x_i,\dots,x_k] = \frac{f[x_{i+1},\dots,x_k] - f[x_i,\dots,x_{k-1}]}{x_k - x_i} \qquad 0 \le i < k \le n$$

(d) Sei $f \in C^{n+1}([a,b])$. Dann existiert $\xi(x) \in (a,b)$ für alle $x \in [a,b]$, sodass

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \quad (\text{Fehlerformel})$$

$$\Rightarrow \; \| f(x) - p_n(x) \|_\infty \le \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \| w_{n+1} \|_\infty \quad \text{mit}$$

$$w_{n+1} = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \in \mathcal{P}_{n+1}$$

3.3 Taylor-Formel und Hermitinterpolation

$$f \in C^{n+1}([a,b]), \quad f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0) \frac{1}{k!} (x-x_0)^k}_{=: q_n \in \mathcal{P}_n} + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

$$\xi(x) \in (a,b)$$

$$q_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0,\dots,n$$

Hermite-Interpolationsaufgabe
(nicht nur Funktionswerte, sondern auch Ableitungen sollen reproduziert werden)

$$f(x) - q_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Lagrangesche Restglied-darstellung ist sehr ähnlich zur Fehlerformel aus (3.2) (Satz (d))

Bemerkung: Newton-Darstellung für $x_k \to x_0$ $(k = 1,\dots,n)$

$$f[x_0] = f(x_0) \searrow$$

$$f[x_1] = f(x_1) \rightarrow \quad f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \xrightarrow[x_1 \to x_0]{} f^{(1)}(x_0)$$

$$f[x_2] = f(x_2) \rightarrow \quad f[x_1,x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} = \dots \rightarrow f^{(1)}(x_2) \longrightarrow *$$

$$* \quad f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{f^{(1)}(x_2) - f^{(1)}(x_0)}{x_2 - x_0}$$

$$\xrightarrow[x_2 \to x_0]{} f^{(2)}(x_0)$$

14.05.18

$\Rightarrow$ im Grenzfall $x_k \to x_0$ ergibt sich

$$f[x_0, \dots, x_k] \longrightarrow f^{(k)}(x_0)$$

3.4 Hermite - Genocchi - Formel

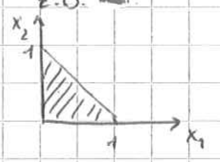
beschreiben den Zusammenhang zw. den dividierten Differenzen und den Ableitungen

Satz: Sei $f \in C^k([a,b])$, $k \geq 1$. Dann gilt

① $$f[x_0, \dots, x_k] = \int_{\Sigma^k} f^{(k)}\left(x_0 + \sum_{i=1}^{k} s_i (x_i - x_0)\right) ds,$$

wobei $\Sigma^k = \left\{ s \in \mathbb{R}^k \mid 0 \leq s_i, \sum_{i=1}^{k} s_i \leq 1 \right\}$

z.B. Σ^2



k-dimensionaler Einheitssimplex

mit $|\Sigma^k| = \frac{1}{k!}$

Beweisidee: $k = 1$, $\Sigma^1 = [0,1]$

$$\int_0^1 f^{(1)}(\underbrace{x_0 + s_1 (x_1 - x_0)}_{=: z})\, ds_1 = \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} f^{(1)}(z)\, dz$$

$$= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$

Dann Induktion ... □

Vereinfachte Darstellung: $s_0 := 1 - \sum_{i=1}^{k} s_i \Rightarrow \sum_{i=0}^{k} s_i = 1$

$$\Rightarrow f[x_0, \dots, x_k] = \int_{\Sigma^k} f^{(k)}\left(\sum_{i=0}^{k} s_i x_i\right) ds$$

3.5 Dividierte Differenzen für konfluente (zusammenfallende) Stützstellen

$a \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_k \leq b$

Hermite - Genocchi - Formeln sind wohldefiniert.

Definition: Für $f \in C^k([a,b])$, $a \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_k \leq b$ definieren wir

$$f[x_0, \dots, x_k] := \int_{\Sigma^k} f^{(k)}\left(\sum_{i=0}^{k} s_i x_i\right) ds.$$

Falls $x_0 = x_1 = \dots = x_k$, so ist $\sum_{i=0}^{k} s_i x_i = x_0$ und mit $|\Sigma^k| = \int_{\Sigma^k} ds = \frac{1}{k!}$ ergibt sich $f[x_0, \dots, x_k] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$.

Dies ist eine stetige Erweiterung von (1) aufgrund

Satz: Sei $f \in C^k([a,b])$ und $\{x_i^\nu\} \subset [a,b]$ Folgen mit der Eigenschaft $\lim_{\nu\to\infty} x_i^\nu = x^* \in [a,b] \quad \forall i$.

Dann gilt $\lim_{\nu\to\infty} f[x_0^\nu, \dots, x_k^\nu] = f[\underbrace{x^*, \dots, x^*}_{k+1}] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x^*)$

Beweis:

$$\lim_{\nu\to\infty} f[x_0^\nu, \dots, x_k^\nu] \overset{\text{Def}}{=} \lim_{\nu\to\infty} \int_{\Sigma^k} f^{(k)}\left(\sum_{i=0}^k s_i x_i^\nu\right) ds$$

$$\underset{\substack{[a,b] \text{ kompakt} \\ \Rightarrow f \text{ gleichm. stetig}}}{=} \int_{\Sigma^k} \lim_{\nu\to\infty} f^{(k)}\left(\sum_{i=0}^k s_i x_i^\nu\right) ds$$

$$= \int_{\Sigma^k} f^{(k)}(x^*)\, ds = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x^*) \qquad \square$$

3.6 Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes

Satz: Es sei $a \le x_0 \le x_1 \le \dots \le x_k \le b$ und $f \in C^k([a,b])$. Dann gibt es ein $\xi \in [x_0, x_k]$ mit $f[x_0, \dots, x_k] = \frac{1}{k!} f^k(\xi)$.

Beweis: Aus Hermite-Genocchi

$$f[x_0, \dots, x_k] = \int_{\Sigma^k} \underbrace{f^{(k)}\left(\sum_{i=0}^k s_i x_i\right)}_{\text{nimmt auf } \Sigma^k \text{ Minimum und Maximum an}} ds$$

$$\underbrace{\frac{1}{k!} \min_{s \in \Sigma^k} f^{(k)}\left(\sum_{i=0}^k s_i x_i\right)}_{f^{(k)}(x_{min})} \le f[x_0, \dots, x_k] \le \underbrace{\frac{1}{k!} \max_{s \in \Sigma^k} f^{(k)}\left(\sum_{i=0}^k s_i x_i\right)}_{f^{(k)}(x_{max})}$$

$x_{min}, x_{max} \in [x_0, x_k] \Rightarrow$ Zwischenwertsatz liefert $\xi \in [x_0, x_k] \subset [a,b]$ $\square$