3.7 Hermite'sche Interpolationsaufgabe

Wie müssen wir die Interpolationsaufgabe für konfluente Stützstellen stellen?

Satz [Skript F3.6]:

16.5.18

Es sei $f \in C^{k_0}[a,b]$, und $a \leq x_0 = \ldots = x_{k_0} \leq x_{k_0+1} < \ldots < x_n \leq b$.
Dann ist das Newton-Polynom

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$$

die eindeutige Lösung der Hermite'schen Interpolationsaufgabe:

$$p_n \in \mathcal{P}_n: \quad \begin{aligned} p_n^{(k)}(x_0) &= f^{(k)}(x_0) \quad &, \; k = 0, 1, \ldots, k_0 \\ p_n(x_k) &= f(x_k) \quad &, \; k = k_0+1, \ldots, n \end{aligned}$$

Falls zusätzlich $f \in C^{n+1}[a,b]$, dann gibt es zu jedem $x \in [a,b]$ ein $\xi(x) \in [a,b]$, so daß die Fehlerformel gilt:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \underbrace{(x - x_0)^{k_0+1} \prod_{k=k_0+1}^{n} (x - x_k)}_{= \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)}$$

Beweis: a) Eindeutigkeit.

$(p_m - q_m)^{(q)}(x_0) = f^{(q)}(x_0) - f^{(q)}(x_0) = 0$, $q = 0, \dots, k_0$
$(p_m - q_m)(x_k) = 0$, $k = k_0+1, \dots, m$

Seien $p_m, q_m \in \mathbb{P}_m$ Lösungen. Dann hat $p_m - q_m$ eine (k_0+1)-fache Nullstelle x_0, und $(m-k_0)$ einfache Nstellen $x_{k_0+1}, \dots, x_m$.

$\Rightarrow$ $m+1$ Nullstellen, Grad $\le m$, damit $p_m - q_m \equiv 0$.

b) Lösung durch Newton-Polynom.

$$p_m(x) = \sum_{k=0}^{k_0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \sum_{k=k_0+1}^{m} f[x_0, \dots, x_k](x-x_0)^{k_0+1} \prod_{i=k_0+1}^{k-1}(x-x_i)$$

$\prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i)$

$f[x_0, \dots, x_q] = \frac{1}{q!} f^{(q)}(x_0)$ für $q \le k_0$ und $x_0 = \dots = x_{k_0}$

Die Hermite-Bedingungen folgen durch Einsetzen

$\hookrightarrow$ $p_m^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, $k = 0, 1, \dots, k_0$.

Für dem Rest benutzen wir:

- Eindeutigkeit für nicht-konfluenten Stützstellen
- stetige Abhängigkeit

Wähle Folgen $\{x_k^\nu\}$, $k = 0, 1, \dots, k_0$ mit $\lim_{\nu\to\infty} x_k^\nu = x_0$, und

$$x_0^\nu < x_1^\nu < \dots < x_{k_0}^\nu \quad \forall \nu$$

setze

Für $k > k_0$: $x_k^\nu = x_k \quad \forall \nu$

$\Longrightarrow$ alle x_k^ν, $k = 0, \dots, m$, unterschiedlich, also löst

$$p_m^\nu(x) = \sum_{k=0}^{m} f[x_0^\nu, \dots, x_k^\nu] \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i^\nu)$$

die Interpolationsaufgabe

löst $p_m^\nu(x_k^\nu) = f(x_k^\nu)$ $k = 0, \dots, m$ (wegen Vorwissen ! 3.2)

Stetigkeit aus Satz 3.5 [Skript 3.4]: $\text{coeffs}(p_m^\nu) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \text{coeffs}(p_m)$,

also $\| p_m - p_m^\nu \|_\infty \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$ auf $[a,b]$.

Daher:

$$|p_m(x_k) - \underset{p_m^\nu(x_k)}{\underset{\|}{f(x_k)}}| \le \| p_m - p_m^\nu \|_\infty \xrightarrow{\nu\to\infty} 0.$$

c) Weg 1: Fehlerformel gilt für Stützstellen x_k^ν, alle verschieden; dann benutze $p_m^\nu \to p_m$ $(\nu\to\infty)$ um Fehlerformel zu kriegen. Tricky, weil wir wissen nicht, ob ξ^ν konvergiert (Abhilfe: betrachte $\liminf_{\nu\to\infty} f^{(m+1)}(\xi^\nu(x))$ ~~und~~ $\limsup$, dann nehme ξ mit dem richtigen Wert.

benutze Fehlerformel aus (3.2) und Satz (3.5) (Stetigkeit)

$f(x_k) - p_m(x_k) = 0$ für $k = k_0+1, \dots, m$

Weg 2: Wenn $x = x_k$, Aussage trivial. Nehme $x_k \ne x \in [a,b]$ $\forall k$, ~~und~~ als zusätzlichen Knoten hinzu.

$x \ne x_k$

zugehöriges Interp.-Polynom

$$p_{m+1}(z) = p_m(z) + f[x_0, \dots, x_k^m, x](z-x_0)\cdot\ldots\cdot(z-x_m)$$

Summand für $k = m+1$

Einsetzen von / Nehme $z = x$:

$$\underset{\|}{f(x)} = p_m(x) + f[x_0, \dots, x_k^m, x](x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_m)$$

Aus Satz 3.6: $\quad = f^{(m+1)}(\xi(x))/(m+1)!$ ∎

Bem: Für $k_0 = m$ erhält man das Taylorpolynom q_m selbst Lagrangescher Restgliedsdarstellung (Mittelwertsatz)

3.8 Beispiel : Hermite - Interpolation

Interpolationsaufgabe: $p_3 \in \mathbb{P}_3 : \quad p_3^{(\ell)}(0) = f^{(\ell)}(0) = +1 \ , \ \ell = 0,1 \qquad p_3^{(\ell)}(1) = f^{(\ell)}(1) = -1 \ , \ \ell = 0,1$

Also $x_0 = x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = 1$

Neville - Tableau : (Nutze Rekursion für dividierte Differenzen)

$f[x_k] = f(x_k)$

$f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_k] - f[x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}$

k	x_k	$f[x_k]$	$f[x_{k-1}, x_k]$	$f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k]$	$f[x_{k-3}, \dots, x_k]$
0	0	1			
1	0	1	$\boxed{1} = f'(x_0)$		
2	1	-1	$\frac{-1-1}{1-0} = -2$	$\frac{-2-1}{1-0} = -3$ ($x_2 - x_0$)	
3	1	-1	$\boxed{-1} = f'(x_2)$	$\frac{-1-(-2)}{1-0} = 1$ ($x_3 - x_1$)	$\frac{1-(-3)}{1-0} = 4$ ($x_3 - x_0$)

$\square$: Aus 3.5 (konfluente Stützstellen) $\quad f[x_0, \dots, x_k] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$

Diagonale gibt Koeff's fürs Resultat. $\quad f[x_{k-1}, x_k] = \frac{1}{1!} \cdot f'(x_{k-1})$

$p_3(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$
$= 1 + 1 \cdot x - 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x^2(x-1)$

3.9 Konvergenz der Interpolation

Aus 3.2 (Wdh) : $\|f - p_n\|_\infty \le \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \|\omega_{n+1}\|_\infty \le \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$

Für C^∞ - Fkten kann das die Konvergenz garantieren :

Bsp : $f(x) = \sin(x)$, $[a,b] = [0, 2\pi]$, $x_k = \frac{2\pi}{n} \cdot k$, $k = 0, \dots, n$

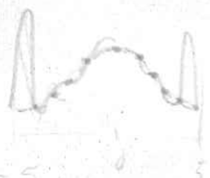
Stirling'sche Formel : $n! \sim \sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

$\rightsquigarrow \|f - p_n\|_\infty \le \frac{1 = \|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} (2\pi)^{n+1} \sim (2\pi)^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2\pi e}{n+1}\right)^{n+1}$

$\rightsquigarrow$ exponentielle Konvergenz ! $\quad \|f - p_n\|_\infty \xrightarrow{n \to \infty} 0$

interpoliere

Bsp : (Runge 1901) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $[a,b] = [-5, 5]$, äquidist. Stützstellen $\quad x_k = \frac{k \cdot 10}{n}$, $k = 0, \dots, n$



$n = 10, 20$: Beobachte Ausschläge für $|x| > 3.63$, keine Konvergenz $\quad \|f - p_n\|_\infty \xrightarrow{n \to \infty} \infty$

Schuld : Polstellen $\pm i$ (weiterführende Theorie) $\quad f(x)$ ist keine ganze Funktion (Potenzreihenentwicklung konvergiert nicht in ganz $\mathbb{C}$)

Funktionentheorie

Bsp : (Bernstein 1912)

Was ist, wenn $f \notin C^\infty$? Noch schlimmer : für $f(x) = |x|$ mit äquidist. Stützstellen auf $[-1,1]$ konvergiert die Interpol. an keiner Stelle $|x| \in (0,1)$.

3.10 Verbindung zur Bestapproximation

Für gegebene Stützstellen betrachte Interpolationsoperator : $\phi : C[a,b] \to \mathbb{P}_n$, $f \mapsto p_n$:
Wdh 6.2, bzw Cotta) :

- ϕ ist linear, Projektion (d.h. $\phi^2 = \phi$)
- $\|\phi\|_\infty = \Lambda_n := \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$, $\quad L_k(x) = \prod_{j \ne k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad$ Lagrange Polynome

Lebesgue - Konstante

~~3.1~~ **Satz** [Skript §3.8]: , also p_n^* Lösung der Bestapproximationsaufgabe Approximationsfehler

Sei $p_n^* = \underset{q \in \mathbb{P}_n}{\operatorname{argmin}} \|q - f\|_\infty$, also $E_n(f) := \min_{q \in \mathbb{P}_n} \|q - f\|_\infty = \|p_n^* - f\|_\infty$

Der Approximationsfehler der Interpolation erfüllt

$$\|f - p_n\|_\infty \le (1 + \Lambda_n) E_n(f) \qquad \forall f \in C[a,b]$$

Beweis: $\|f - p_n\|_\infty \le \|f - p_n^*\|_\infty + \|p_n^* - p_n\|$

$$= \|f - p_n^*\|_\infty + \|\phi(p_n^*) - \phi(f)\|_\infty \le (1 + \|\phi\|_\infty) \cdot \|f - p_n^*\|_\infty$$

$$\le (1 + \Lambda_n) E_n(f)$$

Der Interpolationsfehler ist maximal um den Faktor $(1+\Lambda)$ schlechter als der Approximationsfehler ☒

NB: Λ_n hängt nur von den Stützstellen ab. Λ_n klein ist wünschenswert!